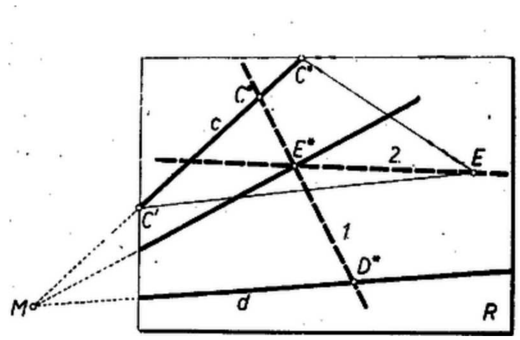
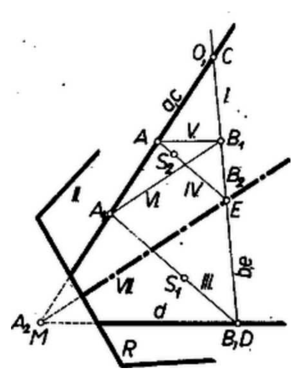
I. Elegendő arra az esetre megoldanunk a feladatot, amikor húzható E-n át olyan egyenes, amely R belsejében metszi c-t és d-t. Tegyük ugyanis fel, hogy erre az esetre megoldottuk a feladatot és egy olyan E pont van adva, amelyre a feltétel nem teljesül (1. ábra). Legyenek c R-en levő szakaszának végpontjai C', C'', egy belső pontja C^*, d egy R-en levő pontja D^*, és a C^*D^* egyenesnek egy a $C'C''E$ háromszög belsejébe eső pontja E^*. Ekkor egyrészt a feltétel szerint meg tudjuk szerkeszteni a kívánt módon az E^*M egyenes R-re eső szakaszát. Másrészt EE^* metszi a c szakaszt, s így feltétel szerint meg tudjuk szerkeszteni az E-t E^*M és c metszéspontjával, vagyis M-mel összekötő egyenesnek az R-re eső szakaszát is.



1. ábra

II. *α)* Tegyük tehát fel, hogy lehet E-n át olyan e egyenest rajzolni (I. lépés), amely c-t és d-t az R-en metszi – a metszéspontok legyenek C, ill. D –, továbbá, hogy E a CD szakaszon van. Ekkor a 645. gyakorlat 1. ábráján a b egyenes szerepét átadhatjuk e-nek, az A_2 és B_2 pont szerepét M-nek, ill. E-nek, O és B-ét pedig C-, ill. D-nek. Így a c, d egyenesek az a, ill. BA_2 egyenes szerepét kapják, és feladatunk a B_2A_2 egyenes megfelelőjének megszerkesztése. (A 2. ábra a régi és az új jelöléseket egyaránt mutatja.)



2. ábra

Ezek után egy a c-nek R-beli szakaszán, C és M között tetszés szerint felvett A_1 pontból kiindulva (II. lépés) EM-et a következő lépésekben kapjuk:

III.: meghúzzuk $A_1D \equiv A_1B$-t;

IV.: ezzel E-n át fektetett $EA \equiv B_2A$ párhuzamossal c-ből kimetsszük A-t;

V.: a d-vel A-n át fektetett párhuzamossal e-ből kimetsszük B_1-et;

VI.: meghúzzuk A_1B_1-et; ekkor

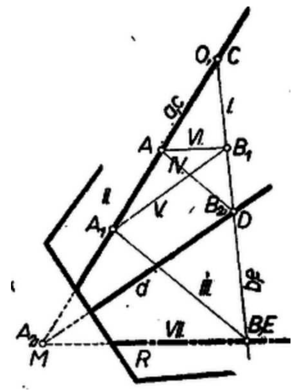
VII.: ezzel az E-n át fektetett párhuzamos a keresett ME egyenes.

Meg kell mutatnunk, hogy lépéseink mindegyike R-ben végrehajtható. Ehhez R-ről csak azt használjuk fel, hogy bármely két pontja közti szakasznak minden pontja ugyancsak az R-en van (vagyis, hogy R egy konvex idom belseje).

Valóban, mivel E a $CD \equiv OB$ szakaszon van, és mert a IV. egyenes párhuzamos a III-kal, azért A az OA_1 szakasz pontja, tehát O és A_1-gyel együtt R-en van. Ezért A az OM szakaszon van, és mivel az V. egyenes párhuzamos d-vel, azért B_1 a CD szakaszon van. Így az A_1B_1 szakasz R-en van, tehát a vele párhuzamos, E-n átmenő egyenesnek R-en levő szakasza megrajzolható.

A felhasznált párhuzamosok szerkesztése ugyancsak elvégezhető R-en; pl. a IV. lépésben az A_1D szakaszon olyan S_1 segédpontot véve, amelyre $S_1D < AE$, az EDS_1 háromszöget EDS_1S_2 paralelogrammává kiegészítő S_2 pont az AE szakaszon, tehát R-en van.

Szerkesztésünk akkor is végrehajtható, ha E az R-nek kerületi pontja, hacsak M az e-nek – amely így legalább a CD szakaszon R határvonalát képezi – azon az oldalán van, mint R.



3. ábra

β) Arra az esetre, ha a CD szakasz nem tartalmazza E-t, a c és d betűk esetleges felcserélésével mindenesetre elérhetjük, hogy $CE > DE$ legyen. Ekkor a fentiekben elég B és B_2 szerepét felcserélnünk, vagyis $E \equiv B$, $D \equiv B_2$, $d \equiv B_2A_2$, és a keresett $EM \equiv BA_2$ egyenest a III.: EA_1; IV.: DA; V.: A_1B_1; VI.: AB_1; VII.: BA_2 lépésekben kapjuk (3. ábra). E ekkor is lehet R élén, de nem lehet R csúcsában, mert így az EM egyenesnek esetleg nincs R-en E-től különböző pontja.

A fenti II. lépésnek előfeltétele, hogy kijelölhessük a C-vel kettévágott c-nek azt a félegyenesét, amelyen a kieső M pont van. Ezt egy az e-vel párhuzamos e' egyenes felhasználásával mindenesetre megállapíthatjuk. Ha ugyanis e' a c, d-t C', D'-ben metszi, akkor $C'D' < CD$ esetén M az e-nek azon az oldalán van, mint e', $C'D' > CD$ esetén pedig az ellenkezőn. $C'D' = CD$ lehetetlen, mert c és d nem párhuzamosak.

Kiegészítésekkel összeállítva a következők dolgozataiból:

Deák István (Budapest, Vörösmarty M. Gimn. I. o. t.),
Dobó Ferenc (Budapest, I. István Gimn. II. o. t.) és
Gáspár Hedvig (Debrecen, Kossuth L. gyak. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megmutatjuk, hogy ha E-n át nem lehet a c és d mindegyikét R-en belül metsző e egyenest húzni, akkor az idézett tételt közvetlenül nem alkalmazhatjuk. Ugyanis, ha a 645. gyakorlat a, b egyenesei nem párhuzamosak, akkor az összes szóban forgó egyeneseket metszik, az $AB_1A_1BA_2B_2$ hatszög oldalegyenesei pedig az összes egyenesek közül csak egy másik egyenest nem metszenek, azt, amellyel párhuzamosak. Így a tételben szereplő 7 pont mindegyikén át van olyan egyenes, amely az összes többi egyeneseket metszi, tehát az E pont a tételben szereplő pontok egyikének szerepét sem veheti át.

2. A dolgozatot beküldő versenyzők többsége tévesen két részből állónak tekintette a kérdést, és csak a vélt 1. résszel foglalkozott, ti. az EM egyenesnek valamely, a 645. gyakorlat tételét fel nem használó megszerkesztésével. Ezzel szemben csak egyet kellett megmutatni, azt, hogy az EM egyenes R-en levő szakasza a 645. gyakorlat tétele alapján megszerkeszthető. A legtöbb téves dolgozat E-n át c, d-vel párhuzamost, vagy rájuk merőlegest szerkesztett, és ezeknek az adott egyenesekkel való metszéspontját és további pontokat felhasználva vélt célhoz jutni, nem törődve azzal, hogy az említett pontok biztosan R-en adódnak-e.