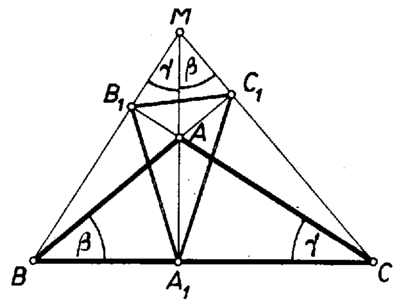
a) A 637. gyakorlat megoldása[1] során említésre került, hogy ha az $ABC = H$ háromszögben $BAC\sphericalangle = \alpha > 90°$, akkor – M-mel a magasságpontot jelölve – az $MCB = H_1$ háromszög hegyesszögű és talpponti háromszöge – a csúcsok sorrendjét tekintve is – azonos H-nak $A_1B_1C_1 = T$ talpponti háromszögével, továbbá H_1 magasságpontja A (1. ábra).

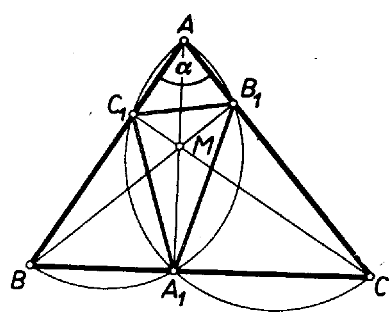


1. ábra

Valóban az MCB háromszögben

$$\begin{array}{llll} A_1 \text{ a } CB \text{ egyenesen van,} & MA_1 \perp CB & \text{és } MA_1 \text{ átmegy } A\text{-n,} \\ B_1 \text{ a } BM \quad ,, \quad ,, & CB_1 \equiv CA \perp BM & \text{és } CB_1 \text{ átmegy } A\text{-n,} \\ C_1 \text{ az } MC \quad ,, \quad ,, & BC_1 \equiv BA \perp MC & \text{és } BC_1 \text{ átmegy } A\text{-n.} \end{array}$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy a $BAM = H_2$ és $CMA = H_3$ háromszögek talpponti háromszöge ugyancsak T (sorrendre nézve is), magasságpontjaik pedig C, ill. B. – Könnyű belátni, hogy ekkor H_2 ben is, H_3-ban is az A csúcsnál tompaszög van, továbbá azt is, hogy hegyesszögű H-ból kiindulva is H_1, H_2, H_3 talpponti háromszöge mindig T, és magasságpontjuk rendre A, C, B (2. ábra).



2. ábra

Ezzel T-hez felsoroltunk 4 különböző olyan háromszöget, melyben a magasságtalppontok éppen T csúcsai. Megmutatjuk, hogy több ilyen háromszög nincs.

A 637. gyakorlat megoldásában azt is láttuk, hogy ha ABC és ACB hegyesszögek, akkor az A_1A magasság A_1B_1-gyel és A_1C_1-gyel egyenlő szögeket zár be, és B_1, C_1 e magasság két oldalán vannak. Eszerint A_1A felezi a $B_1A_1C_1$ szöget. Hasonlóan látható be, hogy bármely nem derékszögű háromszög 3 magasságegyenese és 3 oldalegyenese felezi a talpponti háromszög egy belső vagy egy külső szögét, és így a talpponti háromszög mindegyik csúcsában a belső és külső szögfelezők egyike oldalegyenes, a másika pedig magasságegyenes.

Eszerint azon háromszögek oldalegyenesei, melyeknek talpponti háromszöge egy előre adott T háromszög, csak T belső és külső szögfelezői közül kerülhetnek ki. A mondott háromszögek csúcsai pedig csak a szögfelezők metszéspontjai közül valók lehetnek. – Ámde a belső és külső szögfelezők bármely háromszögre nézve 3-asával 4 pontban, a 4 érintő kör (a beírt kör és a 3 hozzáírt kör) középpontjában metszik egymást, ezeken (és a háromszög csúcsain) kívül más közös pontjuk nincs. E 4 pont közül egy háromszög csúcsait valóban csak 4-féleképpen lehet választani (közülük sorra 1-et–1-et elhagyva). Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

b) A 637. gyakorlat megoldása szerint, ha a háromszög szögei α, β, γ és ezek mindegyike hegyesszög, akkor talpponti háromszögének szögei:

$$\alpha' = 180° - 2\alpha, \qquad \beta' = 180° - 2\beta, \qquad \gamma' = 180° - 2\gamma; \tag{1}$$

ha pedig $\alpha > 90°$, akkor T szögei:

$$\alpha' = 2\alpha - 180°, \qquad \beta' = 2\beta, \qquad \gamma' = 2\gamma. \tag{2}$$

[1] K. M. L. 22 (1961) 110. o.

Adatainkat az (1) képletekkel csak egyféleképpen azonosíthatjuk, mert ez a 3 képlet azonos szerkezetű; a

$$180^\circ-2\alpha=24^\circ,\qquad 180^\circ-2\beta=60^\circ,\qquad 180^\circ-2\gamma=96^\circ$$

egyenletrendszerből

$$\mathrm{I}:\qquad \alpha=78^\circ,\qquad \beta=60^\circ,\qquad \gamma=42^\circ.$$

A (2) képlethármassal való azonosítás viszont 3 féleképpen lehetséges aszerint, hogy a megkülönböztetett $2\alpha-180^\circ$ szerepet az adott szögek melyike kapja. A

$$2\alpha-180^\circ=24^\circ,\qquad 2\beta=60^\circ,\qquad 2\gamma=96^\circ\quad \text{rendszerből}$$
$$\mathrm{II}:\qquad \alpha=102^\circ,\qquad \beta=30^\circ,\qquad \gamma=48^\circ,$$

és hasonlóan adódnak a

$$\mathrm{III}:\qquad 12^\circ,\qquad 120^\circ,\qquad 48^\circ\quad \text{és}$$
$$\mathrm{IV}:\qquad 12^\circ,\qquad 30^\circ,\qquad 138^\circ$$

megoldások.

Annak belátására, hogy az I–IV szöghármasok valóban egy-egy háromszög szögei, elég rámutatni, hogy (1) és (2)-ből $\alpha+\beta+\gamma$ értéke

$$270^\circ-\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}\qquad \text{ill.}\qquad 90^\circ+\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2},$$

viszont az adott szögek összege $\alpha'+\beta'+\gamma'=180^\circ$.

Geschek Péter (Budapest, József A. g. II. o. t.)