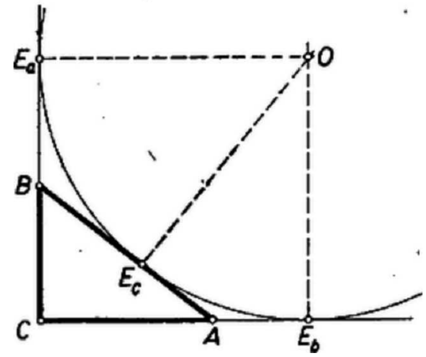
Az oldalak mértékszámai pythagoraszi számhármast alkotnak, éspedig alaphármast, ennélfogva van olyan m, n relatív prím, különböző párosságú pozitív egész számpár, $m > n$, hogy az oldalak

(1)
$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2,$$

ahol c az átfogó[1].



Ismeretes másrészt, hogy minden derékszögű háromszögben az átfogóhoz hozzáírt kör $OE_a = OE_b$ sugara egyenlő a kerület felével (a jelöléseket lásd az ábrán). Ugyanis a derékszög miatt O, E_a, C, E_b egy négyzet csúcsai, ezért a sugár egyenlő a derékszög szárain levő érintési pontoknak a derékszög csúcsától mért $CE_b = CE_a$ távolságával. Ez a távolság viszont bármely háromszögben egyenlő a kerület felével, mert a körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért

$$CE_b + CE_a = CA + AE_b + CB + BE_a = CA + CB + (AE_c + BE_c) =$$
$$= b + a + c = 2s,$$

tehát $CE_b = s$.

Eszerint esetünkben m, n-nel kifejezve

(2)
$$\varrho_c = m^2 + mn = m(m+n) = 420.$$

Itt $m+n$ biztosan páratlan, mint egy páros és egy páratlan szám összege, ezért m páros, sőt 4-gyel is osztható. Továbbá $m + n > m$, mert n pozitív, így m kisebb, $m + n$ pedig nagyobb, mint 420 négyzetgyöke, ami 20,4..., azaz $m \leq 20$ és $m + n \geq 21$. Másrészt $n < m$ miatt $m + n < 2m$, ezért (2)-ből

$$m \cdot 2m = 2m^2 > 420, \qquad m > \sqrt{210} = 14{,}4\ldots,$$

tehát $m \geq 16$.

Ezek szerint m értéke csak 16 vagy 20 lehet. Azonban 420 nem osztható 16-tal; a másik lehetőséggel viszont

$$m = 20, \qquad m + n = 21, \qquad n = 1,$$

és így (1)-ből $a = 399$, $b = 40$, $c = 401$.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hasonló meggondolással célhoz érhetünk a pythagoraszi alaphármasok

$$a = uv, \qquad b = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad c = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

képletrendszeréből[2] is, ebben u, v relatív prímek, páratlanok, és $u > v$.

2. A megoldások legtöbbje hosszabb meggondolásokkal választotta ki a (2)-nek, ill. a jelzett második úton az ennek megfelelő egyenlőségnek eleget tevő egész számpárokból a megfelelőt.

[1] Lásd K.M.L. (1961) 3. o. lábjegyzet

[2] Ugyanott