a) A szélső tagok nevezőinek $2x-8$ összege egyenlő a közbülső két tag nevezőjének összegével. Ezért megpróbálhatjuk új ismeretlennek venni ezen összeg felét. $x-4=z$, azaz $x=z+4$ helyettesítéssel, a szélső és közbülső tagpárok közös nevezőre hozásával

$$\left(\frac{1}{z+3}+\frac{5}{z-3}\right)+\left(\frac{3}{z+1}-\frac{9}{z-1}\right)=\frac{6(z+2)}{z^2-9}-\frac{6(z+2)}{z^2-1}=$$

$$=6(z+2)\left(\frac{1}{z^2-9}-\frac{1}{z^2-1}\right)=0. \tag{1}$$

Eszerint $z+2=0$ megoldást ad: $z=-2$, és így $x=2$. A második zárójel nem lehet 0, mert z^2-9 és z^2-1 különbözők, reciprokaik szintén, tehát különbségük nem 0. Eszerint az egyenletnek csak egy gyöke van.

b) Itt is fennáll a fent látott összefüggés, de jól használhatjuk azt is, hogy két-két számláló összege 0. E tagokat páronkint összeadva

$$3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-3}\right)=5\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}\right),\qquad \frac{-12}{x^2-2x-3}=\frac{20}{x^2-6x+5}.$$

Feltéve, hogy egyik nevező sem 0, és véve a két oldal reciprokát, rendezés után

$$x(2x-7)=0,\qquad \text{és innen}\qquad x_1=0,\quad x_2=3{,}5,$$

egyik sem kizárt érték. Valóban, mindkettő kielégíti az egyenletet.

c) Az *a)* esethez hasonló rendezéssel

$$\frac{6(9x+8)}{x^2-9}-\frac{6(x+8)}{x^2-1}=\frac{48(x^3+8)}{(x^2-1)(x^2-9)}=0.$$

A számlálóbeli kéttagú kifejezés a $8=2^3$ észrevétel alapján szorzattá alakítható:

$$x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2).$$

Mostmár $x+2=0$-ból $x=-2$ (evvel egyik nevező sem 0), a második tényező viszont nem lehet 0, mert bármely x mellett pozitív:

$$x^2-2x+4=(x-1)^2+3\geq 3,$$

tehát több gyök nincs.

d) Legyen az *a)* esethez hasonlóan $x-0{,}5=z$. Így

$$3\left(\frac{1}{z-2{,}5}+\frac{1}{z+2{,}5}\right)-\left(\frac{1}{z-1{,}5}+\frac{1}{z+1{,}5}\right)=\frac{6z}{z^2-6{,}25}-\frac{2z}{z^2-2{,}25}=$$

$$=\frac{4z(z-0{,}5)(z+0{,}5)}{(z^2-6{,}25)(z^2-2{,}25)}=0,$$

ami csak $z_1=0$, $z_2=0{,}5$ és $z_3=-0{,}5$ mellett teljesülhet. Ezek mindegyike megoldást ad, mert velük mind a négy nevező 0-tól különböző szám, éspedig

$$x_1=0{,}5,\qquad x_2=1,\qquad x_3=0.$$

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi Ilona lg. II. o. t.)

Megjegyzés. A gyakorlat kitűzésekor a versenyzők figyelmébe ajánlottuk a 626. gyakorlat megoldását,[1] amely néhány feltételt adott arra, hogy az

$$\frac{A}{mx+n}+\frac{B}{px+q}+\frac{C}{rx+s}+\frac{D}{tx+u}=0$$

egyenlet megoldható legyen (vegyes) harmadfokú egyenletre vonatkozó ismeretek nélkül. Mint láttuk, mind a négy egyenletünk ebbe a típusba tartozik. Az *a)* esetben

$$\frac{A}{m}+\frac{B}{p}+\frac{C}{r}+\frac{D}{t}=1+3-9+5=0,$$

és a bal oldal tagjainak összevonásával – a fenti (1)-et tovább alakítva nem kapunk harmadfokú tagot a számlálóban, amint az idézett helyen általában láttuk a (4) előtti feltételben. Hasonlóan a *b)* és *d)* egyenletre az ottani ($4a$) feltétel teljesül:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{q}+\frac{C}{s}+\frac{D}{u}=0,\quad \text{mert}\quad 3-5+1+1=0,\quad \text{ill.}$$

$$-1+\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=0.$$

A *c)* esetben látott egyszerűsödést a 626. gyakorlat a feltétel felírása nélkül említette.

[1] K.M.L. 22 (1961) 67. o.