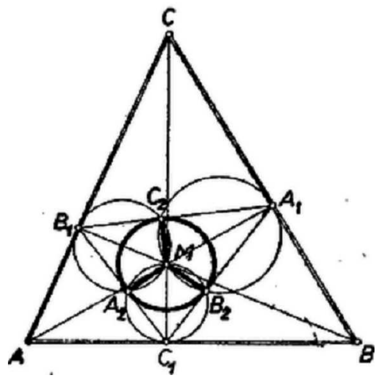
Az $ABC = H$ háromszögre vonatkozóan megszerkesztett körök egyik közös pontja az M magasságpont. A második metszéspontokat jelöljük A_2, B_2, C_2-vel az ábrák szerint. Megmutatjuk, hogy A_2, B_1, C_1, hasonlóan B_2, C_1, A_1 és C_2, A_1, B_1 egy egyenesre esnek, továbbá hogy A_2, B_2, C_2 az M pont vetületei az $A_1B_1C_1 = T$ talpponti háromszög oldalegyenesein. Elég ezt szimmetria-okokból pl. A_2-re belátni. $MA_2B_1\sphericalangle = MA_2C_1\sphericalangle = 90°$, mert A_2 az MB_1 és MC_1 fölé rajzolt Thalész-körök metszéspontja; így B_1 és C_1 az MA_2-re A_2-ben emelt merőlegesen van, és ezt mondja állításunk.



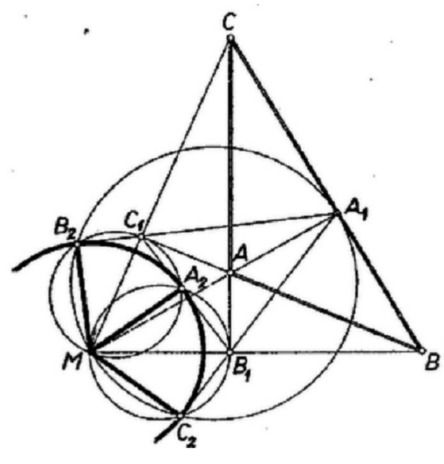
1. ábra

Így az MA_2, MB_2, MC_2 húrok egyenlőségéhez azt kell belátnunk, hogy M egyenlő távolságra van T mindhárom oldalegyenesétől. Evégett bebizonyítjuk, hogy az A_1M, B_1M, C_1M magasságegyenesek – ha H hegyesszögű – felezik T-nek megfelelő belső szögét, tompaszögű H esetében pedig két külső és egy belső szögét.

Ha H hegyesszögű (1. ábra), akkor a magasság-talppontok az oldalszakaszokon vannak, és bármelyik két csúcs és a belőlük húzott magasságok talppontjai egy húrnégyszög csúcsai (egy oldal fölötti Thalész-körben). Az ABA_1B_1 és ACA_1C_1 húrnégyszögekből az α szög és a szemben fekvő szög külső szögének egyenlőségéből

$$B_1A_1C\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha = C_1A_1B\sphericalangle,$$

és így az ezeket a szögeket 90°-ra kipótló MA_1B_1 és MA_1C_1 szögek is egyenlők, állításunknak megfelelően. Hasonló okoskodás érvényes a másik két magasságra is.



2. ábra

Ha H tompaszögű ($BAC\sphericalangle > 90°$, 2. ábra), akkor BCM hegyesszögű háromszög, magasságegyenesei az AM, AB, AC egyenesek, talpponti háromszöge szintén T. Így AM az A_1-nél levő belső szöget felezi; BM és CM viszont merőleges a B_1-nél, ill. C_1-nél levő belső szöget felező AC, ill. AB egyenesre, s így ezek T megfelelő külső szögeit felezik.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Megállapításunkat így is mondhatjuk: M a T-re nézve vagy a beírt, vagy az egyik hozzáírt kör középpontja, a vizsgált húrok pedig ezen körnek a T oldalain levő érintési pontokhoz tartozó sugarak.

Fejéregyházi Sándor (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)