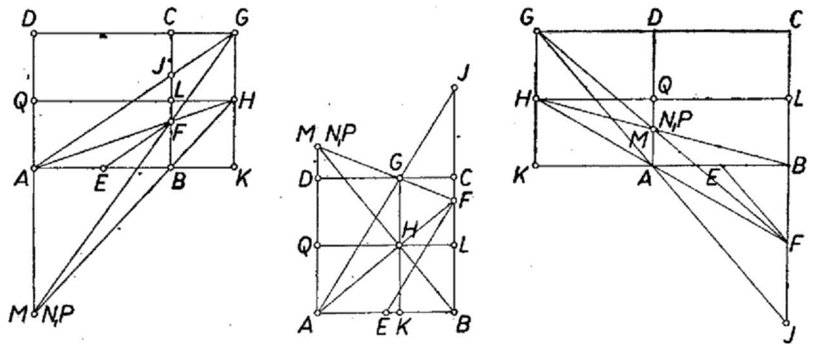
AG és BC metszéspontját J-vel jelölve EF az ABJ háromszög középvonala, és így $FB = FJ$. Ezért AF az ABJ háromszög súlyvonala, és az AF egyenes felezi minden a BJ-vel (azaz BC-vel) párhuzamos egyenesnek az $AJ \equiv AG$ és AB egyenesek közti szakaszát. Ha tehát a G-n átmenő, BC-vel párhuzamos egyenes AF-t H^*-ban, és AB-t K-ban metszi, akkor $GH^* = H^*K$, ennélfogva H^* rajta van a négyzet AB-vel párhuzamos QL középvonalán. Így pedig H^* azonos H-val, $GH \equiv GH^* \parallel BC$. Ezzel az 1) állítást bebizonyítottuk.



A 2) állításban szereplő metszéspont egy esetben határozatlan, éspedig ha F a BC oldal L felezőpontjában van, mert így $G \equiv C$, $H \equiv L$, tehát BH azonos FG-vel. – Egy B és L-től különböző F ponttal legyen BH és FG metszéspontja M. Így az MHG, MBF, valamint az AHG, AFJ háromszögpárok hasonlóságából és $BF = FJ$ alapján

$$\frac{MG}{MF} = \frac{HG}{BF} = \frac{HG}{FJ} = \frac{AH}{AF}. \tag{1}$$

Ebből következik, hogy az FGH és FMA háromszögek hasonlók, mert F-nél levő szögük egyenlő – ugyanis csúcsszögek, ha F a BL szakaszon van, és egybeesnek, ha F e szakasz bármelyik oldali meghosszabbításán van –, továbbá (1) szerint az ezt a szöget közrezáró oldalak aránya megegyezik. Valóban, ha F a BL szakaszon van, akkor $MG = MF + FG$, $AH = AF + FH$, és (1) szélső tagjaiból 1-et-1-et levonva

$$\frac{FG}{FM} = \frac{FH}{FA}, \qquad \text{amiből} \qquad \frac{FG}{FH} = \frac{FM}{FA}. \tag{2}$$

Ha F a BC oldal B-n túli meghosszabbítására esik, akkor $MG = FG - FM$, $AH = FH - FA$, és (1) két oldalához 1-et-1-et adva jutunk (2)-re. Végül F minden más helyzete mellett $MG = MF - FG$, $AH = AF - FH$ és (1) szélső tagjaiból 1-et-1-et levonva és (-1)-gyel szorozva kapjuk (2)-t.

Ezek szerint $FHG\sphericalangle = FAM\sphericalangle$, tehát – felhasználva az 1) állítást is – $AM \parallel HG \parallel AD$, s így M valóban az AD egyenesen van.

Tasnády Mária (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A 2) állítás bizonyításában kevesebb esetszétválasztásra van szükség, ha azt bizonyítjuk, hogy GF és BH-nak AD-vel való metszéspontját N, ill. P-vel jelölve N azonos P-vel (az ábrákon a fenti M-mel). A GAN, GJF és a GAD, GJC hasonló háromszög-párokból

$$\frac{AN}{JF} = \frac{GA}{GJ} = \frac{GD}{GC}; \tag{3}$$

hasonlóan a HAP, HFB és a HAQ, HFL háromszög-párokból

$$\frac{AP}{FB} = \frac{HA}{HF} = \frac{HQ}{HL}. \tag{4}$$

Ámde GH és AD párhuzamossága alapján (3) és (4) jobb oldala egyenlő, és ezért a bal is; itt pedig a nevezők egyenlősége alapján a számlálók is egyenlők, tehát $AN = AP$.

Még csak azt kell belátnunk, hogy AN és AP irányra nézve is megegyeznek. A fenti 3 eset közül az első kettőben G és H az AD és BC egyenesek közti síksávon kívül fekszik, ezért AN, JF, FB és AP iránya szomszédos páronként egyező; a harmadik esetben G és H a sávon belül vannak, ezért AN és JF, valamint FB és AP páronként ellentétes irányúak, JF és FB viszont megegyeznek, ezért AN és AP iránya egyező. – Ezek szerint N azonos P-vel.

Kotsis Domokos (Budapest, József A. g. II. o. t.)

2. Sok versenyző számítással, néhány pedig koordináta-geometriai módszerrel oldotta meg a feladatot.