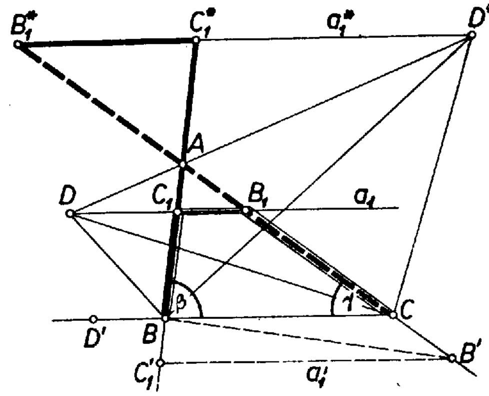
I. megoldás. Az a_1 egyenes metszheti a háromszög AB, AC oldalait, azok A-n túli meghosszabbításait, vagy a BC oldalon túli meghosszabbításait. A három eshetőséget külön-külön vizsgáljuk.



1. ábra

1. Tegyük fel, hogy a_1 egy olyan megoldása a feladatnak, amelynél B_1, C_1 az AC, AB oldalszakaszon van (1. ábra). Mérjük fel a BC_1 szakaszt C_1B_1-nek C_1-en túli meghosszabbítására. A végpontot D-vel jelölve a BC_1D háromszög egyenlő szárú, ezért

$$DBC_1\sphericalangle = \frac{1}{2}BC_1B_1\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - ABC\sphericalangle),$$

tehát BD felezi az ABC háromszög B-nél levő külső szögét. Másrészt a CB_1D háromszög is egyenlő szárú, mert $DB_1 = DC_1 + C_1B_1 = BC_1 + C_1B_1 = CB_1$. Ezért

$$DCB_1\sphericalangle = \frac{1}{2}AB_1D\sphericalangle = ACB\sphericalangle,$$

tehát CD felezi az ABC háromszög C-nél levő szögét.

Ezek szerint D a mondott szögfelezők metszéspontja, és a keresett a_1 a D-n átmenő, a-val párhuzamos egyenes.

Szerkesztésünk helyességének bizonyítására megmutatjuk, hogy az a_1 és AB egyenesek C_1 metszéspontja A és B között van. Ha ezt tudjuk, akkor a fönti meggondolás könnyen megfordítható a szerkesztés igazolására. Azt akarjuk belátni, hogy a D-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes a C-t tartalmazó ADB szögtéren halad keresztül. Ez következik abból, ha megmutatjuk, hogy $ADB\sphericalangle + DBC\sphericalangle > 180^\circ$. A D pont az ABC háromszög AB oldalához hozzáírt külső érintőkör középpontja, ezért AD felezi az A csúcsnál levő külső szöget, tehát a szokásos jelölésekkel $DAB\sphericalangle = (\beta + \gamma)/2$. Így

$$ADB\sphericalangle + DBC\sphericalangle = (180^\circ - DAB\sphericalangle - DBA\sphericalangle) + (DBA\sphericalangle + ABC\sphericalangle) =$$
$$= 180^\circ - DAB\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2} + \beta = 180^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Ez nagyobb 180°-nál, mert feltétel szerint $AB < AC$, s így $\gamma < \beta$. Ebből következik, hogy a_1 és AC-nek B_1 metszéspontja A és C között van, továbbá, hogy C_1 a D és B_1 között van.

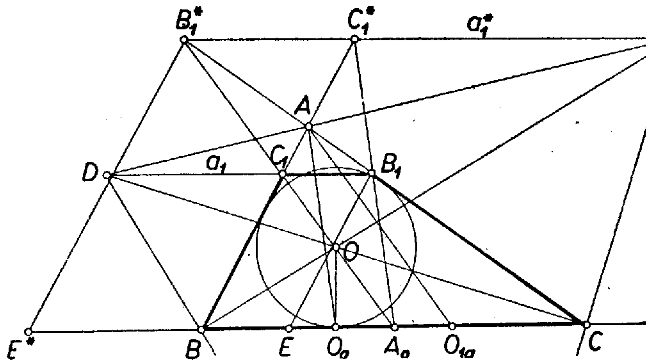
Most már – D'-vel jelölve egy pontot CB-nek B-n túli meghosszabbításán, $DBC_1\sphericalangle = DBD'\sphericalangle = BDC_1\sphericalangle$, ezért $DC_1 = BC_1$. Másrészt $B_1CD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = CDB_1\sphericalangle$, és ezért $CB_1 = DB_1 = DC_1 + CB_1 = BC_1 + CB_1$, a feladat követelményének megfelelően. A szerkesztés minden (az $AB < AC$ feltevésnek megfelelő) háromszögben egyértelműen végrehajtható.

2. Tegyük fel most, hogy B_1 (és vele C_1) az AC, ill. AB oldal A-n túli meghosszabbításán van (az ábrán B_1^*, ill. C_1^*). A fentihez hasonló meggondolás mutatja, hogy az a D^* pont, amelyhez úgy jutunk, hogy a BC_1^* szakaszt felmérjük $C_1^*B_1^*$-nak C_1^*-on túli meghosszabbítására, azonos az ABC háromszög B-nél levő belső szöge és C-nél levő külső szöge felezőinek metszéspontjával, az ABC háromszög AC oldalához hozzáírt külső érintőkör középpontjával. Ebből a keresett egyenesre az előbbitől különböző a_1^* megoldást kapjuk. A fentiekhez hasonlóan be lehet ugyanis látni, hogy a most mondott szögfelezők D^* metszéspontjára nézve $AD^*C\sphericalangle + D^*CB\sphericalangle < 180^\circ$, ezért $D^*C_1^*$ az AD^*C szögtéren kívül halad, tehát C_1^* az AB oldal A-n túli meghosszabbításán van.

3. Más megoldás nincs. Ugyanis B_1 nem lehet AC-nek C-n túli meghosszabbításán, mert $\gamma < \beta$ miatt γ hegyes szög, egy ilyen $B_1'C_1' = a_1'$ helyzettel[1] a BCB_1' tompaszög, tehát a $BB_1'C$ és $BB_1'C_1'$ háromszögekből $CB_1' < BB_1' < BC_1' + C_1'B_1'$, s így a követelmény nem teljesülhet. Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Mészáros György (Budapest, Piarista g. I. o. t.)

[1] Az ábrán B_1' helyett B' áll.



2. ábra

II. megoldás. Messe a B_1-en, ill. B_1^*-on átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes BC-t E-ben, ill. E^*-ban (2. ábra). Nyilvánvaló, hogy az AB_1C_1, B_1CE, $AB_1^*C_1^*$ és $B_1^*CE^*$ háromszögek hasonlók ABC-hez, ezért

$$BC_1 = EB_1 = \frac{CB_1}{AC} \cdot AB, \qquad C_1^*B_1^* = \frac{BC_1^* - AB}{AB} \cdot BC,$$
$$C_1B_1 = \frac{AC - CB_1}{AC} \cdot BC, \qquad CB_1^* = \frac{AC}{AB} \cdot E^*B_1^* = \frac{AC}{AB} \cdot BC_1^*.$$

Ezeket a $\quad BC_1 + C_1B_1 = CB_1, \quad$ ill. $\quad BC_1^* + C_1^*B_1^* = CB_1^*$
követelménybe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk CB_1, ill. BC_1^*-ra, amelyből

$$CB_1 = \frac{BC \cdot AC}{BC + AC - AB}, \quad \text{ill.} \quad BC_1^* = \frac{BC \cdot AB}{BC + AB - AC}.$$

Az adódott nevezők 2-szer akkorák, mint az ABC háromszögbe írt kör és a BC oldal O_a érintkezési pontjának C-től, ill. B-től mért CO_a, BO_a távolsága. Ezért eredményeink – a BC oldal felezőpontját A_0-lal jelölve –

$$CB_1 : CA = CA_0 : CO_a, \qquad \text{ill.} \qquad BC_1^* : BA = BA_0 : BO_a$$

alakban írhatók, és ezek szerint B_1-et és C_1^*-t CA, ill. BA-ból az A_0-n átmenő, AO_a-val párhuzamos egyenes metszi ki.

A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasókra bízzuk. Mutassák meg azt is, hogy $C_1B_1^*$ egyenes is átmegy A_0 -on és párhuzamos AO_{1a}-val, ahol O_{1a} a BC oldalhoz hozzáírt külső érintő körnek BC-n levő érintési pontja.

Kiegészítéssel és egyszerűsítéssel a következők dolgozatai alapján:

Tamás Géza (Makó, József A. g. I. o. t.)
és *Tihanyi László* (Budapest, Petőfi S. g. I. o. t.)