I. megoldás: A feltétel első egyenletéből $a=c+d-b$-t a másodikba helyettesítve

$$c^2+d^2+b^2+2cd-2bc-2bd+b^2=c^2+d^2.$$

Innen rendezés és egyszerűsítés után szorzattá alakítással

$$b^2-bc-bd+cd=b(b-c)-d(b-c)=(b-c)(b-d)=0.$$

Eszerint a $b-c=0$ és $b-d=0$ egyenlőségek közül legalább az egyik fennáll. Mármost (1)-ből, ha $b-c=0$, azaz $b=c$, akkor $a=d$, ha pedig $b-d=0$, azaz $b=d$, akkor $a=c$. Ezzel az állítást igazoltuk. (Természetesen lehet mind a négy érték is egyenlő.)

Tichy Géza (Budapest, Árpád g. II. o. t.)

II. megoldás. Írjuk (1) és (2)-t így

$$(1') \qquad a-c=d-b, \qquad a^2-c^2=d^2-b^2,$$

másképpen

$$(2') \qquad (a-c)(a+c)=(d-b)(d+b).$$

Ha $(1')$ mindkét oldala 0, akkor nincs mit bizonyítanunk, hiszen $a=c$, és $b=d$. Ha pedig $(1')$ két oldalán 0-tól különböző szám áll, evvel $(2')$-t egyszerűsítve

$$a+c=d+b.$$

Ehhez $(1')$-t előbb hozzáadva, majd belőle kivonva $a=d$, ill. $c=b$-re jutunk, ami az állítást igazolja.

Mihályi Zoltán (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

III. megoldás. Legyen (1), ill. (2) két oldalának közös értéke p, ill. r, és tekintsük a, b, c, d-t ismeretleneknek. Vonjuk ki (1) négyzetéből (2)-t, majd egyszerűsítsünk 2-vel:

$$p^2-r=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(c+d)^2-(c^2+d^2)$$

$$(3) \qquad \frac{p^2-r}{2}=q=ab=cd.$$

Ez azt jelenti, hogy a és b az $a+b=p$, $ab=q$ egyenletrendszer megoldása. Innen bármelyik ismeretlen kiküszöbölésével az

$$(4) \qquad x^2-px+q=0$$

egyenletre jutunk, ahol x az a és b bármelyikét jelentheti. Így a, b-re két értékrendszert kapunk, de ezek egymástól csak sorrendben különböznek.

A $c+d=p$, $cd=q$ egyenletrendszer ugyancsak (4)-re vezet. Ámde (4)-nek legfeljebb 2 szám tesz eleget, ezért a c, d számpár valamelyik sorrendben megegyezik az a, b számpárral.

Ha (4) gyökei egyenlők, akkor mindkét egyenletrendszernek csak egy szám tesz eleget és $a=b=c=d$.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyenleteinknek geometriai jelentést tulajdoníthatunk (2) szerint az a, b és c, d befogópárokkal szerkesztett derékszögű háromszögek átfogója egyenlő. (3) szerint pedig területeik is egyenlők, ezért a két háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságok is egyenlők. Ezért a két háromszöget a közös átfogóval mint átmérővel bíró Thalész–félkörbe beillesztve vagy fedik egymást, vagy egy szimmetrikus trapéz csúcsait jelölik ki, és így mindenképpen egybevágók.

Pusztai Dénes (Budapest, I. István g. I. o. t.)

2. Az eredeti feltétel–pár egy geometriai értelmezése a következő. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az a, b, c, d szakaszokból lehet négyszöget szerkeszteni, pl. az a, c, b, d sorrendben, és ez a négyszög konvex. Ekkor (1) szerint a négyszög érintőnégyszög, (2)-ből az következik,[1] hogy átlói merőlegesek, végül a 607. gyakorlatban[2] konvex érintőnégyszög átlói merőlegességének szükséges és elégséges feltételéül azt találtuk, hogy a négyszögben 2–2 szomszédos oldalpárnak egyenlőnek kell lennie. Eszerint vagy $a=c$ és $b=d$ vagy $a=d$ és $b=c$; természetesen mindkét egyenlőségpár is teljesülhet.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

---

[1]Lásd *Kürschák–Neukomm–Surányi:* Matematikai Versenytételek I. (Tankönyvkiadó, 1955) 99. o.: *„Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szemben fekvő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével".*

[2]K. M. L. 21 (1960), 140. o.