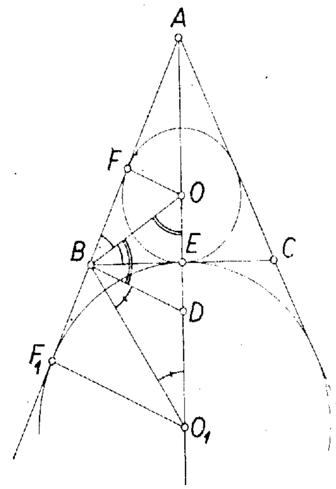
Legyen a háromszög beírt körének középpontja O, és a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja O_1.



Nyilvánvaló, hogy mindkét kör E-ben érinti BC-t, ezért a következőket kell bizonyítanunk

(1) $$BD-ED=OE,$$

(2) $$BD+ED=O_1E.$$

(1)-et átrendezve $BD=OE+ED=OD$, ami azt jelenti, hogy a DBO háromszög egyenlő szárú. Ezt fogjuk bizonyítani. – BO felezi az ABC szöget, ezért

$$DB0\sphericalangle=90^\circ-ABO\sphericalangle=90^\circ-EBO\sphericalangle=EOB\sphericalangle-DOB\sphericalangle.$$

Ebből következik állításunk.

Hasonlóan (2)-ből $BD=O_1E-ED=O_1D$, tehát elegendő bebizonyítani, hogy a DBO_1 háromszög egyenlő szárú. – BO_1 felezi az ABC szög külső szögét, ezért merőleges BO-ra. Így az előbbi egyenlőség felhasználásával:

$$DBO_1\sphericalangle=OBO_1\sphericalangle-DBO\sphericalangle=90^\circ-DOB\sphericalangle=90^\circ-O_1OB\sphericalangle=OO_1B\sphericalangle=$$
$$=DO_1B\sphericalangle,$$

amiből állításunk következik.

Lukács Lídia (Püspökladány, Karacs F. g. I. o. t.)

II. megoldás. Érintsék a körök az AB egyenest F, ill. F_1-ben, így $OF\parallel O_1F_1\parallel DB$. A B-ből a körökhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből $BF=BE=BF_1$, ezért BD az FOO_1F_1 trapéz középvonala, és így felezi az OO_1 szárat:

$$O_1F_1+OF=O_1E+OE=2\cdot BD,\quad \text{és}$$
$$O_1D-OD=(O_1E-ED)-(OE+ED)=0,\quad \text{amiből}$$

(4) $$O_1E-OE=2\cdot ED.$$

Most már (3) és (4)-ből kivonással (1), összeadással (2) adódik.

Strommer Richard (Budapest, Piarista g. I. o. t.)