A háromszög t területét az oldalakból a Heron–képlettel lehet kiszámítani. t az m, n, p, q paraméterek bármely megengedett rendszere mellett akkor racionális szám, ha a képletben kijelölt négyzetgyökvonást általában el lehet végezni, vagyis a gyökjel alatt egy (racionális) kifejezés négyzete áll. Ennek minél egyszerűbb belátása céljára igyekezzünk az adottakból az s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ kifejezéseket szorzat alakjában előállítani. a és b kifejezése szerkezetének hasonlósága alapján várható, hogy már $a+b$ és $a-b$ is szorzattá alakítható. Valóban, tagokra bontás után átcsoportosítva

$$\begin{gathered} a+b=mnp^2+mnq^2+m^2pq+n^2pq=mp(np+mq)+nq(mq+np)= \\ =(mp+nq)(mg+np), \\ a-b=mp(np-mq)+nq(mq-np)=(mp-nq)(np-mq). \end{gathered}$$

Mindkét szorzat egy–egy tényezőben megegyezik c-vel. Ezt mindjárt kiemelve és a másik tényezőket összeadva, ill. kivonva a Heron–képlethez szükséges tényezők 2-szeresei:

$$\begin{aligned} 2s &= (a+b)+c=(mq+np)\cdot 2mp, \\ 2s-2c &= (a+b)-c=(mq+np)\cdot 2nq, \\ 2s-2b &= (a-b)+c=(mp-nq)\cdot 2np, \\ 2s-2a &= -(a-b)+c=(mp-nq)\cdot 2mq. \end{aligned}$$

Ezekkel a képlet gyökjele alatt álló szorzat teljes négyzet:

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=(mq+np)^2(mp-nq)^2m^2n^2p^2q^2,$$

tehát

$$t=mnpq(mq+np)(mp-nq).$$

Ennek kiszámításában az m, n, p, q pozitív racionális számokkal csak összeadást, kivonást és szorzást végzünk, ezért t racionális szám. ($t>0$, mert a feltevés folytán $mp>nq$.)

Sólyom Ilona (Budapest, Veres Pálné lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Eredményünk $t=mnpqc$ alakban is írható. Eszerint a c oldalhoz tartozó h_c magasság is egyszerűen fejezhető ki m, n, p, q-val: $h_c=2t/c=2nmpq$. Ebből – emlékezve a pythagoraszi számhármasokat előállító

(1) $$u^2-v^2,\quad 2uv,\quad u^2+v^2$$

képlethármasra[1] – egyszerű magyarázatot adhatunk az adott képlethármas keletkezésére.

(1) első két számának négyzetösszege a harmadik szám négyzetét adja:

$$\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=u^4+2u^2v^2+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2,$$

tehát Pythagorász tételének megfordítása szerint (1) számai bármely $u>v>0$ számpár mellett derékszögű háromszög oldalainak mértékszámait adják, a harmadik szám az átfogó. Ha u, v racionálisok, akkor az oldalak és a terület is racionálisok, mert a terület a befogók szorzatának fele, $uv(u^2-v^2)$. Így u, v helyén a feladatban szereplő m, n, ill. p, q racionális számpárokkal a

(2) $$m^2-n^2,\quad 2mn,\quad m^2+n^2\quad \text{és}$$

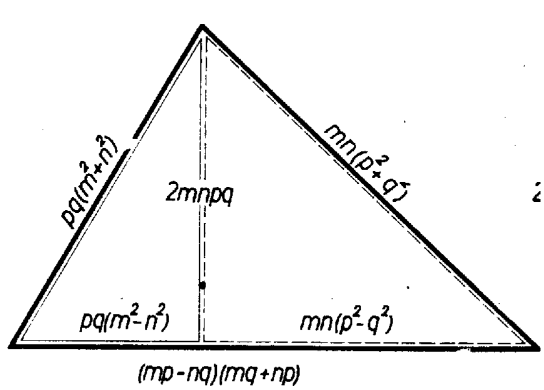
(3) $$p^2-q^2,\quad 2pq,\quad p^2+q^2$$

racionális számhármasok egy–egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai.

Nyilvánvaló, hogy (2) és (3) tagjait egy–egy racionális számmal szorozva, vagyis a háromszögeket racionális arányban nagyítva az új oldalak és az új terület is racionálisok. Ha mármost (2)-t pq-val, (3)-at mn-nel szorozzuk:

$$pq(m^2-n^2),\quad 2mnpq,\quad pq(m^2+n^2);\qquad mn(p^2-q^2),\quad 2mnpq,\quad mn(p^2+q^2),$$

a két új háromszög második befogója megegyezik.



[1]Lásd legutóbb K. M. L. 22 (1961) 3. o. Bővebben: *Rademacher–Toeplitz:* Számokról és alakzatokról (Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1954) 84. o. Ott u, v erősebb követelményeket is kielégítő racionális számok.

1. ábra

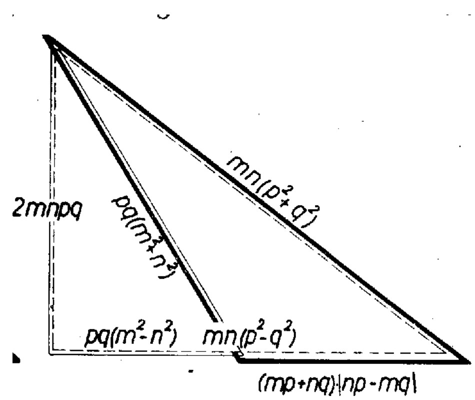
Ezeket közös befogójuk mentén úgy egymáshoz illesztve, hogy a derékszögek csúcsai egybeessenek, egyetlen háromszöget kapunk, melynek két oldala a két új átfogó – éppen az adott b, ill. a, – a harmadik pedig a nem közös befogók összege:

$$pq(m^2-n^2)+mn(p^2-q^2)=pqm^2+mnp^2-pqn^2-mnq^2=$$
$$=mp(mq+np)-nq(np+mq)=(mp-nq)(mq+np),$$

ez pedig éppen c. A részháromszögek területe racionális, tehát az összeillesztéssel nyert háromszög területe, amazok összege, ugyancsak racionális.

Raisz Miklós (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)

2. Világos, hogy a két háromszög úgy is összeilleszthető, hogy amelyiknek a nem közös befogója nagyobb, az fedi a másikat.



2. ábra

3. Ha az a, b, c pozitív egész számok egy háromszög oldalainak mértékszámai, és e háromszög területének mértékszáma ugyancsak egész, akkor a, b, c-t *Heron–féle számhármas*nak szokás nevezni. Ha még a, b, c-nek nincs közös osztója, akkor alaphármassal állunk szemben.