I. megoldás. Természetesen csak olyan x-ekről lehet szó, amelyekkel egyik nevező sem 0, különben a kifejezéseknek nincs értelmük. Ilyen kizárandó érték csak $x=2$, mert $x^2+x+1=(x+0{,}5)^2+0{,}75$, tehát mindig pozitív. Így a bal oldali nevezővel szorozva

$$(x+3)^2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-2) \tag{1}$$

ugyancsak azonosság. 0-ra redukálva és rendezve:

$$(A+B-1)x^2+(A-2B+C-6)x+(A-2C-9)=0.$$

Ez csak úgy állhat fenn minden 2-től különböző x-re, ha minden együttható külön–külön 0, mert különben a bal oldalon egy másodfokú vagy elsőfokú polinom, vagy egy 0-tól különböző állandó lenne, ez pedig csak két, vagy egy helyen illetőleg egy helyen sem lehetne 0-val egyenlő. A feladat követelménye tehát csak akkor teljesülhet, és akkor nyilvánvalóan teljesül is, ha

$$A+B-1=0, \tag{2}$$

$$A-2B+C-6=0, \tag{3}$$

$$A-2C-9=0. \tag{4}$$

Adjuk hozzá (3)-hoz (2)-nek 2-szeresét és (4)-nek 0,5-szeresét:

$$3{,}5A-12{,}5=0, \qquad \text{amiből} \qquad A=25/7.$$

Ebből (2) és (4) alapján $B=-18/7$, $C=-19/7$, tehát a keresett azonosság:

$$\frac{(x+3)^2}{(x-2)(x^2+x+1)}\equiv\frac{25}{7(x-2)}-\frac{18x+19}{7(x^2+x+1)}.$$

Ambrus Károly (Budapest, I. László g. II. o. t.)

II. megoldás. Az, hogy (1) azonosság, azt jelenti, hogy minden x-re teljesül, amire a két oldalon szereplő kifejezéseknek értelme van. Így x-nek egy tetszés szerinti értéket választva egyenletet kapunk A, B, C-re. Mivel 3 ismeretlenünk van, 3 értéket választunk, lehetőleg olyat, amellyel könnyen számolhatunk. Legyen sorra $x=0$, 1 és -1, ezekkel

$$9=A-2C, \qquad 16=3A-B-C, \qquad 4=A+3B-3C, \tag{5}$$

innen pedig ismét a fenti A, B, C-értékhármas adódik.

Görbe Tamás (Budapest, Bem J. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Nem véletlen, hogy az $x=0$ helyettesítéssel adódott (5) egyenlet azonos (4)-gyel, hiszen (4)-ben is csak az x-et nem tartalmazó tagokat vettük figyelembe.

2. Az első megoldásbeli meggondolás mutatja, hogy ha a feladatbeli egyenlőség azonosság, akkor (1) minden x-re, még $x=2$-re is teljesül, ezért a II. megoldásban ezt is használhattuk volna. Ez célszerű is, mert így A-ra mindjárt a $25=7A$ egyismeretlenes egyenletet kaptuk volna.