$1599=1600-1=40^2-1^2=39\cdot 41=3\cdot 13\cdot 41$, az utolsó alakban mind a három tényező törzsszám. Ezért az N szám akkor és csak akkor osztható 1599-cel, ha 3, 13 és 41 mindegyikével osztható.

N-ről előbb azt kell belátnunk, hogy egész szám, hiszen oszthatóságról csak így lehet szó. Megmutatjuk, hogy a nevező minden tényezőjével lehet egyszerűsíteni. Evégett $n!$ minden tényezőjét törzsszámhatványok szorzatára felbontott alakjában gondoljuk előállítva.

Egy tetszés szerinti p törzsszám a többszöröseinek, a p, $2p$, $3p$, $\ldots$ számoknak szorzatfelbontásában lép fel, és csak ezekben. E számok a természetes számok 1, 2, 3, $\ldots$, $n-1$, n, $n+1$, $\ldots$ sorozatában (az elejétől számítva) minden p-edik helyet foglalnak el. A többszörösök helyére a p-vel való osztásuk 1, 2, 3, $\ldots$ hányadosát írva ezekben is találunk p-vel osztható számokat. Ezek p^2 többszöröseinek helyén állnak és az eredeti sorozatban az elejétől számítva minden p^2-edik helyet foglalnak el, belőlük egy második p-tényező is kiemelhető. Hasonlóan az eredeti sorozat minden p^3-ödik, p^4-edik, $\ldots$ számából egy további, vagyis 3-ik, 4-ik, $\ldots$, p-tényező is kiemelhető. Ebből nyilvánvaló, hogy a természetes számok sorozatában *akárhonnan* kiindulva *az első p lépésen belül* találunk p-vel osztható számot, az első p^2, az első p^3, $\ldots$ lépésen belül találunk p^2-nel, p^3-nel, $\ldots$ osztható számot.

Írjuk mármost N-et a számláló első 1700 tényezőjével (törzsszám szorzatra való felbontás nélkül) egyszerűsítve az

$$N=\frac{1701\cdot 1702\cdot 1703\cdot\ldots\cdot 3399\cdot 3400}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1699\cdot 1700}$$

alakban. Itt a számláló és a nevező egyaránt 1700 egymás utáni tényezőt tartalmaz. Ha p bármely a nevezőben fellépő, vagyis 1700-nál nem nagyobb törzsszám, akkor a fentiek szerint a nevező p tényezőjéhez találunk a számláló első p tényezője között egy p-vel oszthatót, legyen ez q, ezeket p-vel egyszerűsítjük. Hasonlóan a nevező $2p$, $3p$, $\ldots$ tényezőjét és a számláló $q+p$, $q+2p$ tényezőjét is páronként p-vel egyszerűsíthetjük. Ha a nevezőben eredetileg a p^2, p^3, $\ldots$ hatvány is fellépett, vagyis $p^2<1700$, ill. $p^3<1700$, akkor a számláló eredeti tényezői között is volt p^2-nel, p^3-nel osztható – éspedig ugyanannyi, mint a nevezőben –, tehát minden szóbajövő p minden a nevezőben szóbajövő hatványával egyszerűsíthetünk. Így N valóban egész szám.

Ezekkel a feladat tulajdonképpeni megoldását is előkészítettük, már csak ez a kérdés: maradt-e N számlálójából az egyszerűsítés után 3-as, 13-as, 41-es tényező. Kiszámítjuk, hányszor lépett fel tényezőként pl. 41 a számlálóban és hányszor a nevezőben. N eredeti alakjából indulunk ki.

A számlálóban annyi 41-gyel osztható tényező van, amennyi a $3400:41$ osztás hányadosának egész része, vagyis 82 (a maradék 38; tehát 3-mal továbbmenve, 3403-ban találnánk ismét 41-gyel osztható számra). Egy–egy további 41-es tényező $82:41=2$ számban szerepel. (Nincs maradék.) Harmadik 41-es tényezőt tartalmazó szám nincs, mert $2:41$ egész része 0 (másképpen, mert $41^3>3400$), tehát a 41-es tényezők száma 84. – Hasonlóan az 1700! számban 42, négyzetében 84 db 41-es tényező van. Eszerint N számlálójából az egyszerűsítéssel minden 41-es tényező eltűnik, N nem osztható 41-gyel. Így a 3-as és a 13-as törzsszám vizsgálata nélkül kimondhatjuk, hogy N 1599-cel sem osztható.

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.) dolgozatából, kiegészítéssel.

Megjegyzések. 1. A legutóbbi osztások maradékaiban fordított sorrendben megkaptuk a 3400-as szám 41-es alapú számrendszerbeli alakjának számjegyeit: $3400=2\cdot 41^2+0\cdot 41+38$. Így azt az n kitevőt, amellyel 41 a 3400!-ban foglaltatik, LEGENDRE idevágó tétele[1] alapján is kiszámíthatjuk:

$$\frac{3400-(2+0+38)}{41-1}=\frac{3360}{40}=84.$$

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

2. Hasonlóan kapjuk, hogy N-ben 3 kitevője 6, 13 kitevője 2.

3. A dolgozatok természetesnek vették, hogy N egész szám, csak néhányan hivatkoztak arra, hol található ennek bizonyítása.[2] Ezt nem tekintettük hiánynak, bár többen így válaszoltak: „az adott törtszám nem osztható 1599-cel.” – Sokan helyes választ adtak, de ezt arra alapították, hogy 1599 törzsszám. Ezek hibásak.

[1]Lásd pl. *Kürschák–Hajós–Neukomm–Surányi:* Matematikai versenytételek I. rész (Tankönyvkiadó, 1955), 128. o.

[2]*Faragó László:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. Középiskolai szakköri füzet (Tankönyvkiadó 1955) 175. feladat, 21. o.