Mindkét számkifejezés 2-ik és 3-ik tagjában a gyökjel alatt ún. „kapcsolt" kifejezések állnak, amelyeknek szorzata racionális, éppen 1-gyel egyenlő. Ezért várható, hogy ha kifejezéseinket

$$\sqrt{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \quad \sqrt{6}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

alakban írjuk és a zárójelbeli kéttagúakat négyzetük négyzetgyökével pótoljuk, egyszerűbb kifejezést kapunk. Valóban

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\mp\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}\mp 2\sqrt{1}+2-\sqrt{3}=4\mp 2,$$

vagyis 2, ill. 6, tehát a zárójel értéke $\sqrt{2}$, ill. $\sqrt{6}$. Így pedig mindkét szám 0-val egyenlő, nincs előjele.

Tamás Géza (Makó, József A. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A zárójelbeli kéttagúak helyére az ismert

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

azonosság–pár[1] felhasználásával egytagúakat írhatunk, ugyanis

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}\mp\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A\mp\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Esetünkben $A=2$, $B=3$, ezért $A^2-B=1$, tehát a jobb oldalon $\sqrt{2}$, ill. $\sqrt{6}$ áll.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

2. Ha a belső gyökjelek alatt álló „3" szám helyett x-et írunk, kifejezéseink x függvényei:

$$y_1=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{x}}-\sqrt{2+\sqrt{x}}, \qquad y_2=\sqrt{6}-\sqrt{2-\sqrt{x}}-\sqrt{2+\sqrt{x}}.$$

Értéküket $x=0$ és $x=4$ mellett könnyen megkapjuk. Azt találjuk, hogy az előbbi helyen y_1 pozitív, y_2 negatív, az utóbbin pedig megfordítva, vagyis mindkét függvény grafikonjában az $x=0$ és $x=4$-hez tartozó pontok az X-tengely ellentétes oldalán vannak. Kézenfekvő azt gondolni, hogy y_1 és y_2 folytonosan változnak, tehát $x=0$ és $x=4$ között minden a talált két–két érték közti értéket felvesznek (esetleg még mást is), így a 0-t is. (Szemléletesen: grafikonjuk folytonos vonal, és így valahol átmetszi az X-tengelyt.) Ha tudnánk, hogy y_1 és y_2 a 0 értéket $x=0$ és $x=4$ között csak egyszer veszik fel, akkor ez az x érték a 0-tól 4-ig terjedő számközt olyan két részre vágná szét, amelyek egyikében a függvény pozitív, a másikban negatív, tehát előjele könnyen megállapítható. Megkeresve, hogy mely x-ekre teljesülhet $y_1=0$, ill. $y_2=0$ (vagyis megoldva x-re ezt a két egyenletet), azt kapjuk, hogy mindkét függvényre csak az $x=3$ hely jöhet szóba. Itt függvényeink értéke éppen a két adott számkifejezés. *Ha* tehát a függvények folytonosságáról tett feltevésünk helyes, *akkor* $x=3$-ra $y_1=0$ és $y_2=0$.

E meggondolás helyességét azonban csak a középiskolában tanultaknál mélyebb fogalmakkal és ismeretekkel lehet belátni. A gondolatmenet a fentinél bonyolultabb formában *Fazekas Patrik* (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.) dolgozatában szerepel, ő a „2" szám helyett is változót írt.

[1] Lásd pl. *Faragó L.:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. Középiskolai Szakköri Füzetek. (Tankönyvkiadó 1955.) 71. o. 80. feladat.