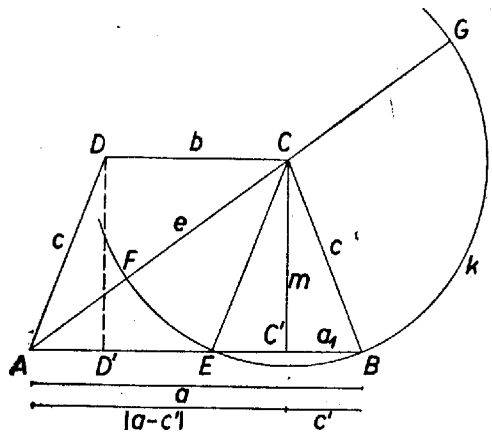
I. megoldás. *a)* Feltehetjük, hogy $a > b$, ($a = b$ esetén téglalapról lenne szó, és az állítás a Pythagorász–tételre egyszerűsödik.) Rajzoljuk meg a b oldal egyik végpontjából a trapéz e átlóját és m magasságát (1. ábra).



1. ábra

Az utóbbi a trapézból egy derékszögű háromszöget metsz le, melynek a-n levő befogója $a_1 = (a-b)/2$ hosszúságú, és átfogója a szár. Az a oldal fennmaradó $a - a_1 = (a+b)/2$ darabja az átlóval és a magassággal ugyancsak derékszögű háromszöget alkot. Ezekből

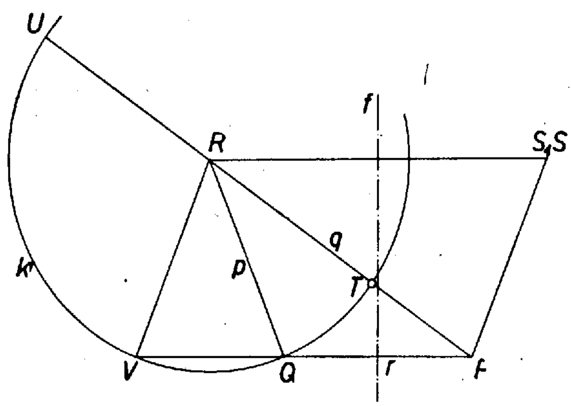
$$m^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2, \qquad m^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = e^2,$$

és m^2 kiküszöbölésével (röviden: kivonással)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab = e^2 - c^2,$$

amit bizonyítanunk kellett.

b) Tükrözzük R-t a QP szakasz f felező merőlegesére, és legyen a képe S_1 (2. ábra).



2. ábra

Így $RS_1 \perp f \perp QP$, ezért $RS_1 \parallel QP$, S_1 az R-en átmenő, PQ-val párhuzamos egyenesen van, és a $PQRS_1$ idom szimmetrikus trapéz. Elég tehát azt belátnunk, hogy a kijelölt S pont azonos S_1-gyel. Az *a)* részben bebizonyított tételt $PQRS_1$-re alkalmazva $RS_1 \cdot QP = RP^2 - RQ^2$, azaz $RS_1 = (q^2 - p^2)/r = RS$. Másrészt az RS_1 irány megegyezik a QP iránnyal, mert $p < q$, azaz $RQ < RP$ miatt R az f-fel kettévágott síknak azon a felén van, mint Q, ennélfogva S_1 azon a felén van a síknak, mint P. Ezek szerint az S pont szerkesztési utasítása valóban S_1-et állítja elő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gáspár Hedvig (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. I. o. t.)

II. megoldás. *a)* Legyen az $ABCD$ szimmetrikus trapézban (1. ábra) $AB \parallel CD$, $AB = a > b = CD$, $AD = BC = c$, ekkor $DAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle$ (az $a > b$ feltevés folytán hegyes szögek). Rajzoljuk meg C körül a c sugarú k kört. Ez az AC egyenest egyszer A és C között F-ben metszi, mert nyilván $e > c$ (az ellentétes esetben a trapéz hurkolt lenne, amit kizárunk) és egyszer az átló C-n túli meghosszabbításán G-ben. Így $AF = e - c$, $AG = e + c$. Másrészt k átmegy B-n és metszi AB-t egy belső E pontban. Megmutatjuk, hagy a $CEAD$ idom paralelogramma, és így $AE = DC = b$.

Valóban, az $EBC\triangle$ egyenlő szárú, ezért egyrészt $CE = CB = DA$, másrészt $CEB = CBE\sphericalangle = CBA\sphericalangle = DAB\sphericalangle$, tehát $CE \parallel DA$. Most már a kör egy ponton átmenő két szelőjének metszeteire ismert tétel szerint $AB \cdot AE = AF \cdot AG$, vagyis $ab = (e-c)(e+c) = e^2 - c^2$. Ezt kellett bizonyítanunk.

b) Az R körül p sugárral írt k' körre nézve P külső pont, mert $RP = q > p$. Ezért k' és a PR, PQ egyenes metszéspontjait T és U, valamint V-vel jelölve $TP = q - p$, $UP = q + p$, és a szelőkre idézett tétel szerint $VP \cdot QP = TP \cdot UP$, vagyis $VP \cdot r = (q-p)(q+p)$, és így $VP = (q^2 - p^2)/r = RS$. Másrészt V és Q a P-nek ugyanazon oldalán vannak, tehát VP egyirányú QP-vel, tehát RS-sel is. Ezért a $VPSR$ idom paralelogramma. És mivel az RQV háromszög egyenlő szárú, és a QV alap vagy része VP-nek, vagy annak V-n túli meghosszabbításán van (aszerint, hogy a $PQR\sphericalangle$ hegyes vagy tompa), azért a $PQRS$ trapéz szimmetrikus.

Dobó Ferenc (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat *a)* és *b)* állítása egybefoglalva így is kimondható: egy (konvex) trapéz akkor és csak akkor szimmetrikus trapéz, ha az egyik átlójának és egyik szárának négyzetéből képezett különbség egyenlő a párhuzamos oldalak szorzatával. Ezt a két állítást összevontan bizonyítjuk be. Feltehetjük, hogy a trapéznak van hegyes szöge, legyen ez az $ABC\sphericalangle$ (1. ábra). Így C-nek AB-n levő C' vetülete B-nek ugyanazon oldalán van, mint A. Legyen $BC' = c'$, így AC' hossza $|a - c'|$. A $CC'A$ és $CC'B$ derékszögű háromszögekből

$$e^2 - c^2 = \left[m^2 + (a-c')^2\right] - (m^2 + c'^2) = a^2 - 2ac'.$$

Az $e^2 - c^2 = ab$ követelményből

$$a^2 - 2ac' = ab, \qquad c' = \frac{a^2 - ab}{2a} = \frac{a-b}{2},$$

mert $a \neq 0$. Mivel $c' > 0$, azért $a > b$. Továbbá $c' < a/2 < a$, tehát C' az AB szakaszon van. Másrészt $a - c' = (a+b)/2 > (b+b)/2 = b$, tehát D-nek AB-n levő D' vetülete az AC' szakaszra esik, és $AD' = AC' - D'C' = a - c' - b = (a-b)/2 = c' = BC'$, eszerint a követelmény csak egyenlő szárú trapézban teljesül. Ilyenben viszont mindig teljesül, mert itt a szárnak a hosszabb oldalon levő vetülete $c' = (a-b)/2$.

Strobl Ilona (Budapest, Móricz Zs. g. II. o. t.)

2. A szerkesztőség azért fogalmazta a *b)* részt külön állításként, hogy a versenyzők könnyebben vegyék észre, hogy az állítás megfordításáról van szó. A más jelölés viszont a részek jobb megkülönböztetését célozta. Ezek ellenére számos dolgozat a *b)* résszel nem foglalkozott, ill. helyességét természetesnek vette.