I. megoldás. Megmutatjuk, hogy x- és y-nak nemnegatív egész értékeket adva (1) bal oldalával bármely 7-nél nagyobb egész szám előállítható. $x=0$-val $k=3y$, tehát $k=0, 3, 6, 9, 12, \ldots$, azaz minden 3-mal osztható nemnegatív szám előállítható. $x=1$-gyel $k=3y+5=3(y+1)+2$, tehát $k=5$, 8, 11, $\ldots$, azaz minden egész szám előállítható, amely 3-mal osztva maradékul 2-t ad és 5-nél nem kisebb. Végül $x=2$-vel $k=3y+10=3(y+3)+1$, tehát $k=10$, 13, 16, $\ldots$, azaz minden számot megkapunk, amely 3-mal osztva maradékul 1-et ad és 10-nél nem kisebb.

Minden egész szám vagy osztható 3-mal, vagy pedig a 3-mal való osztásnál a maradéka 2, vagy 1, ezért minden természetes számot megkapunk a 2,és az 1, 4, 7 kivételével. Ezeket nagyobb x-értékekre sem kaphatjuk meg, mert ha $x=3l+r$, ahol $l \geqq 1$ és $r=0$, 1 vagy 2, akkor $5x+3y=5r+3(y+5l)=5r+3y'$, ahol $y'=y+5l>y \geqq 0$, tehát $5x+3y$ előfordul a felírt három számsorozat valamelyikében.

A négy kiemelt szám legnagyobbika 7, tehát valóban minden a 7-nél nagyobb egész k számhoz van olyan nemnegatív egész x, y számpár, amellyel (1) teljesül.

Ha csak pozitív egész értékeket engedünk meg x és y részére, akkor $x=1$, 2, 3-mal $k=3y+5$, $3y+10$, ill. $3y+15$-ből $y=1, 2, 3, \ldots$ mellett a

$$k=8,11,14,17,\ldots;\ k=13,16,19,22,\ldots;\ k=18,21,24,27,\ldots$$

értékeket kapjuk meg, és nem kapjuk meg e sorozatok visszafelé való folytatásának számait, így a természetes számok közül az 5, 2; 10, 7, 4, 1; 15, 12, 9, 6, 3 számokat. Ezek legnagyobbika 15, ez a keresett érték.

Bod Katalin (Miskolc, Herman O. lg. II. o. t.)

II. megoldás. (1)-ből

$$y=\frac{k-5x}{3}=\frac{k-6x+x}{3}=-2x+\frac{k+x}{3}=-2x+u,$$

ahol u egész szám, mert y és $-2x$ egészek.

$$u=\frac{k+x}{3}\text{-ból}$$

(2) $$x=3u-k, \quad \text{és így}$$

(3) $$y=-2(3u-k)+u=-5u+2k.$$

A (2), (3) képletpár bármely egész k mellett, és tetszés szerinti egész u értéket választva egy x, y egész megoldását adja (1)-nek.

Ámde x, y-ra csak nemnegatív, ill. csak pozitív egész számokat engedünk meg, így u értéke korlátozott.

Az $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ követelésből

$$3u-k \geqq 0, \quad -5u+2k \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad u \geqq k/3, \quad u \leqq 2k/5,$$

összefoglalva

$$\frac{k}{3} \leqq u \leqq \frac{2k}{5}, \qquad \text{amiből}$$

(4) $$5k \leqq 15u \leqq 6k.$$

Eszerint adott k mellett csak akkor található megfelelő u-érték, ha egyrészt $5k \leqq 6k$, vagyis $k \geqq 0$, másrészt $5k$ és $6k$ közé esik 15-tel osztható szám, a számegyenes $5k$ és $6k$ pontjai közé egy 15-tel osztható szám képe – a végpontokat megengedve.

Ha pedig $x>0$, $y>0$, akkor (az „=” jelek elhagyásával a megoldhatóság feltétele) $5k<15u<6k$, vagyis a 15-tel osztható szám képének az $(5k, 6k)$ szakasz belsejébe kell esnie. E szakasz hossza $6k-5k=k$, ezért nyilvánvaló, hogy $k>15$ esetén legalább egy 15-tel osztható szám képe esik a belsejébe, mert az ilyen számokat ábrázoló pontok közti legrövidebb távolság 15 egység. $k=15$ esetén viszont maguk $5k$ és $6k$ a 15-tel oszthatók, nincs megfelelő u, ezért (1)-nek nincs megoldása. Eszerint a második kérdésben keresett egész szám: 15.

Most már az első kérdésre elég a $k=8$, 9, $\ldots$, 15 számokra megmutatnunk a feltétel teljesülését. Valóban, ha

$k=$	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	akkor
$5k=$	40,	45,	50,	55,	60,	65,	70,	75,	
$6k=$	48,	54,	60,	66,	72,	78,	84,	90,	és így megfelel:
$15u=$	45,	45,	60,	60,	60,	75,	75,	75.	

Pl. $15u=45$, azaz $u=3$-mal $k=9$ mellett (2) és (3)-ból $x=0$, $y=3$. $k=7$-re viszont az $(5k, 6k)=(35, 42)$ számköz a végpontjait is hozzászámítva sem tartalmazza 15-nek egy többszörösét sem.

Gaul Géza (Budapest, József A. g. II. o. t)