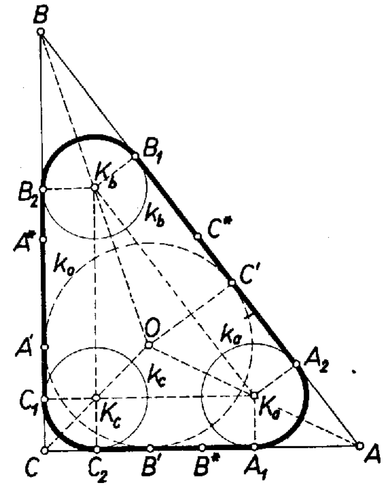
A szokásos jelölésekkel az ABC háromszög belsejében a $\varrho/2$ sugarú k kör egy oldal mentén addig tolható, míg az egyik szomszédos oldallal is érintkezésbe jut, pl. a CA oldal mentén A felé addig, míg AB-t A_2-ben érinti. Legyen k ezen k_a helyzetének középpontja K_a és CA-n levő érintési pontja A_1. Ekkor k nem súrolhatja a körív és érintői határolta konkáv A_1AA_2 idom területét.



Az ábra további hasonló jelöléseit használva a súrolt idom a körívek és egyenesszakaszok határolta konvex $A_1A_2B_1B_2C_1C_2 = H$ idom. Ennek t_s területét úgy kaphatjuk, hogy az $ABC\triangle$ t területéből kivonjuk az AA_2A_1, BB_2B_1, CC_2C_1 konkáv idomok területének összegét. Ugyanis k-t egy–egy háromszögoldal mentén gördítve a súrolt idomnak az oldaltól legtávolabb levő pontjai az oldaltól átmérőnyi, vagyis ϱ távolságra vannak. A kör tehát H-nak csak olyan pontjait nem súrolná, amelyek mindhárom oldaltól ϱ-nál nagyobb távolságra vannak. A háromszög belsejének a kerülettől legtávolabbi pontja azonban a beírt k_0 kör O középpontja, amely mindhárom oldaltól ϱ távolságra van, tehát k a H idom minden pontját súrolja.

k_0-nak az oldalakon levő érintési pontjait A', B', C'-vel jelölve a nem súrolt görbevonalú háromszögek rendre hasonlók a k_0-on kívül eső $B'AC'$, $C'BA'$, $A'CB'$ idomokhoz, mert hasonló helyzetűek azokhoz, a hasonlóság középpontja rendre A, B, C. A megfelelő szakaszok aránya mindenütt $K_aA_1 : OB' = 1:2$, ezért a területek aránya $1:4$. Eszerint a k által nem súrolt háromszögek együttes területe negyedrésze annak a területnek, amely az ABC háromszögből a beírt kör elvétele után marad, vagyis

$$\frac{1}{4}(t-\varrho^2\pi) = \frac{t}{4} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2\pi. \tag{1}$$

Ennélfogva a súrolt terület

$$t_s = \frac{3t}{4} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2\pi = \frac{3ab}{8} + \left(\frac{a+b-c}{4}\right)^2\pi,$$

ugyanis a beírt kör átmérője

$$\begin{aligned} 2\varrho = OA' + OB' = B'C + A'C = (AC - AB') + (BC - BA') = \\ = AC + BC - (AC' + BC') = BC + AC - AB = a + b - c. \end{aligned}$$

Ugyancsak hasonlók a $K_aK_bK_c$ és ABC háromszögek is, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak; a megfelelő szakaszok aránya $1:2$, mert pl. a beírt körök sugarainak ez az aránya. Ezért a súrolt idomot határoló egyenes szakaszok összege $A_2B_1 + B_2C_1 + C_2A_1 = K_aK_b + K_bK_c + K_cK_a = (AB + BC + CA)/2 = (a+b+c)/2$, a körív darabok összege $\widehat{A_1A_2} + \widehat{B_1B_2} + \widehat{C_1C_2} = (\widehat{B'C'} + \widehat{C'A'} + \widehat{A'B'})/2 = 2\varrho\pi/2 = \varrho\pi$, tehát a teljes kerület

$$\frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2}\pi.$$

Dudinszky Ilona (Budapest, Budai Nagy A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. t_s-t úgy is számíthattuk volna, mint a $K_aK_bK_c$ háromszög, a $K_aA_2B_1K_b$, $K_bB_2C_1K_c$, $K_cC_2A_1K_a$ téglalapok és az együttesen k-t kitevő $K_aA_1A_2$, $K_bB_2B_1$, $K_cC_1C_2$ körcikkek területének összegét.

Bárdy Gyula (Sopron, Kempelen F. gépip. t. II. o. t.)

2. Meggondolásunk bármely háromszögre érvényes. A háromszög derékszögű volta csak ϱ és a terület egyszerűbb kifejezését tette lehetővé.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak g. II. o. t.)