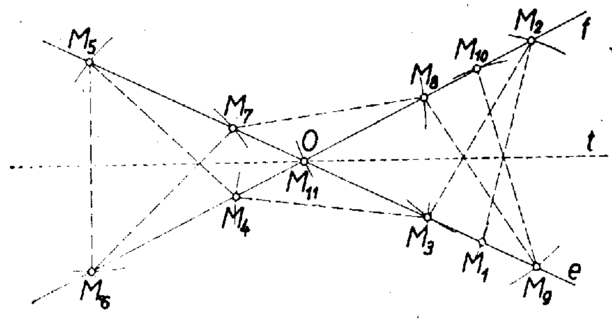
Az $OM_1M_2$, $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_4, \dots$ $M_8M_9M_{10}$, $M_9M_{10}M_{11}$ háromszögek – jelöljük őket sorra $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{10}$-zel – szerkesztésnél fogva egyenlő szárúak, és $OM_2$, $M_1M_3$, $\dots$, $M_9M_{11}$ alapjuk váltakozva az $f$, $e$ egyenesen van.




Szögeikből megkapjuk az $M_1M_2$, $M_2M_3$, $\dots$, $M_{10}M_{11}$ szakasznak $e$ és $f$-fel bezárt szögeit. Jelöljük a $180°/11$ szöget $\alpha$-val, így a szögek összege $11\alpha$, és $\alpha$ többszörösei közül $5\alpha$ még hegyes szög, $6\alpha$ már tompa.

Az $OM_1M_2$ háromszögben $M_1OM_2\sphericalangle = M_1M_2O\sphericalangle = 3\alpha$ (nem lehet ugyanis szó $e$ és $f$ $8\alpha$ nagyságú tompaszögéről), ezért $OM_1M_2\sphericalangle = 11\alpha - 2\cdot 3\alpha = 5\alpha$. Ez hegyes szög, tehát $M_3$ az $M_1$-nek azon az oldalán adódik, ahol $O$ van. – $H_2$-ben $M_1M_3M_2\sphericalangle = 5\alpha$, így $M_1M_2M_3\sphericalangle = \alpha < M_1M_2O\sphericalangle$, tehát $M_3$ az $OM_1$ szakaszon van, és $M_2M_3O\sphericalangle = 6\alpha$, $M_3M_2O\sphericalangle = 2\alpha$. – $H_3$-ban $M_3M_4M_2\sphericalangle = 2\alpha$, így $M_2M_3M_4\sphericalangle = 7\alpha > M_2M_3O\sphericalangle$, tehát $M_4$ az $M_2$-ből nézve $O$-n túl van, és $M_4M_3O\sphericalangle = \alpha$. – $H_4$-ben $M_3M_5M_4\sphericalangle = \alpha$, így $M_3M_4M_5\sphericalangle = 9\alpha > M_3M_4M_2\sphericalangle$, tehát $M_5$ az $M_3$-ból nézve $O$-n túl van, és $M_5M_4O\sphericalangle = 7\alpha$, tompa szög. – Ezért $H_5$-nek $M_5M_4M_6$ és $M_5M_6M_4$ szögei ennek kiegészítő szögei, nagyságuk $4\alpha$, tehát $M_6$ az $O$-ból nézve $M_4$-en túl van, továbbá $M_4M_5M_6\sphericalangle = 3\alpha$, és ezért $M_6M_5O\sphericalangle = 4\alpha$.

Az $M_5M_6M_4\sphericalangle = M_5M_6O\sphericalangle = M_6M_5O\sphericalangle = 4\alpha$ egyenlőség szerint az $OM_5M_6$ háromszög egyenlőszárú, vagyis $M_6$ az $M_5$ tükörképe az $e$ és $f$ közti $3\alpha$ nagyságú szög $t$ felezőjére nézve. Ez pedig azt jelenti, hogy $M_7$-nek $M_6$-ból való szerkesztése tükörképe annak ahogyan $M_5$-ből visszajutnánk $M_4$-re, vagyis $M_7$ az $M_4$ tükörképe $t$-re. Ugyanígy $M_8$, $M_9$, $M_{10}$ rendre az $M_3$, $M_2$, $M_1$ tükörképe, végül a kérdéses $M_{11}$ az $O$ tükörképe $t$-re. És mivel $O$ rajta van $t$-n, azért $M_{11}$ egybeesik $O$-val. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Raisz Miklós* (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)