A tetszés szerinti jegyet j-vel jelölve a $\overline{33\,33j}$ alak $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ 9-cel tíz egymás utáni természetes számot ad meg. Négyzetüket a legkisebb $33\,330^2 = 1\,110\,888\,900 = N$-ből kiindulva az

$$(1)\qquad (n+1)^2 = n^2 + \big[n + (n+1)\big]$$

azonosság alapján egymás után könnyen képezhetjük. A szögletes zárójelbeli d hozzáadandó értéke az első lépésben $33\,330 + 33\,331 = 66\,661$, lépésenként $1 + 1 = 2$-vel növekszik: $66\,663$, $66\,665$, $\ldots$, és az utolsó (a 9-ik) lépésben $33\,338 + 33\,339 = 66\,677$-et tesz ki. Mindegyik érték kisebb 10^5-nél, a 9 növelés összege kisebb 10^6-nál, ezért a legnagyobb számra $33\,339^2 < N + 10^6 = 1\,111\,888\,900$. Eszerint valamennyi négyzet az 111 jegyhármassal kezdődik, az állításnak megfelelően. E három jegy felírását az (1) szerinti képezésben mellőzve az egymás utáni négyzetek utolsó 7 jegye rendre:

0 **88** 900,	+**66** 661,	= 0 9**55** 561,	+**66** 663 =	1 0**22** 224,	+**66** 665 =
= 1 0**88** 889,	s. **í**. t.	1 1**55** 556,		1 2**22** 225,	
1 2**88** 896,		1 3**55** 569,		1 4**22** 244,	
1 4**88** 921.					

Valóban mind a tízben van két szomszédos egyező számjegy: az ezres és a tízezres értékű helyen álló jegy, sőt az utolsó kivételével e két jeggyel legalább egyik szomszédjuk is egyezik (az első négyzet kivételével a százas helyen álló jegy mindig, az elsőben pedig a százezres értékű). – Eszerint a $f = 9$ eset kivételével minden $\overline{3333j}^2$-ben van két legalább 3-tagú, egymás utáni egyező jegyekből álló számjegy–sorozat, sőt $j = 2,\ 3,\ 4$ és 5-re mindkét sorozat legalább 4-tagú.

A $\overline{6666j}^2$ számokra az előzők alapján már kevesebb számítással célhoz érünk $M = 66\,660^2 = (2\cdot 33\,330)^2 = 4\cdot 1\,110\,888\,900 = 4\,443\,555\,600$ első három jegye 4-es, és ez minden $\overline{6666j}^2$-ben fennáll, ha $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$, mert legnagyobbjukra: $66\,669^2 < 66\,670^2 = (2\cdot 33\,335)^2 = 4\cdot 1\,111\,222\,225 = 4\,444\,888\,900$. – Egyenlők e számok ezres és tízezres jegyei is. Ezt M-ben közvetlenül látjuk, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$-re pedig abból, hogy a $66\,661$, $\ldots$, $66\,669$ számok $n = 33\,339$, $\ldots$, $33\,331$-gyel páronként 10^5-t adnak összegül, márpedig a

$$(10^5 - n)^2 = (10^5 - 2n)10^5 + n^2$$

azonosság szerint n^2 és $(10^5 - n)^2$ utolsó öt jegye ugyanaz, e két szám a jobb oldal első tagja szerint csak a 10^5 és magasabb értékű helyeken álló jegyekben különbözhet. – Eszerint a $33\,339^2$-nek megfelelő $66\,661^2$ kivételével minden $\overline{6666j}^2$-ben van két legalább háromtagú, a követelményeknek eleget tevő számjegysorozat.

Még egyszerűbb a harmadik négyzetsorozat esete. Ugyanis $\overline{9999j}^2 = (100\,000 - j')^2 = (10^5 - j')^2 = (10^5 - 2j')10^5 + j'^2$, ahol $j' = 10,\ 9,\ 8,\ \ldots,\ 2,\ 1$. Így $j'^2 \leqq 100$, ezért az első öt helyre csak a $10^5 - 2j' = 99\,980$, $99\,982$, $\ldots$, $99\,998$ számok jegyei jönnek szóba, tehát legalább az első három jegy 9-es. A további öt helyen j'^2 áll, felírásához legfeljebb három jegy kell, tehát az ezres és a tízezres jegy 0, sőt a $j' = 10$ eset kivételével a százas értékű jegy is. $j' = 10$ esetén viszont a százezres jegy is 0, tehát e sorozat négyzetei kivétel nélkül két legalább 3 tagú egyenlő jegyekből álló jegysorozatot tartalmaznak.

Megmutatjuk, hogy a $\overline{3333j}^2$ számokban látott ismétlődések az alap jegyei közti ismétlődés következményei, és evvel párhuzamosan a *b)* állítást is bebizonyítjuk. $L = 99\,990^2 = 9\,998\,000\,100$-ból indulunk ki, ebben már láttuk a 9-es és 0 jegyek ismétlődésének okát. Mivel $33\,330 = 99\,900 : 3$, azért N-et az $L : 3^2 = L : 9$ osztásból is számíthatjuk. Részletes felírás nélkül látjuk, hogy a hányados első három jegye 1-es, a negyedik 0; ez után három egymás utáni lépésben a részletosztandó 80, a hányados új jegye 8, és a maradék is 8; majd a 81-es részletosztandóból N-be egy 9-est kapunk, végül két 0 zárja be N jegyeinek sorát.

Általában ($k > 2$ esetén) a k számú 9-es után egy 0-sal írt szám négyzete

$$L^* = \underbrace{99\ldots9}_{k}0^2 = (10^{k+1} - 10)^2 = 10^{2k+2} - 2\cdot 10^{k+2} + 10^2 =$$
$$= (10^k - 2)10^{k+2} + 10^2.$$

Itt $10^k - 2$ az a k jeggyel írt szám, melynek első $k-1$ jegye 9-es, az utolsó pedig 8-as. Erre a 10^{k+2} tényező miatt $k+2$ számú 0 következnék, de ezt a sorozatot a 10^2 tag 1-ese megszakítja, 3 jeggyel $k-1$ tagúra rövidíti, tehát

$$L^* = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}\,8\,\underbrace{00\ldots0}_{k-1}\,1\,00.$$

($k - 1 > 1$, ezért lehet ismétlődésről beszélni). – Mármost a k számú 3-as után egy 0-sal írt szám négyzete L^*-nak 1/9 része. A $k = 4$ eset fenti mintájára nyilvánvaló, hogy az $L^*/9$ hányadosban $k-1$ számú 1-es után egy 0 lép fel, ezeket $k-1$ számú 8-as, egy 9-es és két 0 követi:

$$N^* = \underbrace{33\ldots3}_{k}0^2 = \underbrace{11\ldots1}_{k-1}0\,\underbrace{88\ldots8}_{k-1}900.$$

Feltűnő, hogy a $\overline{3333j}^2$ számok fenti elrendezésének első oszlopában, vagyis a $j = 0$, 3, 6, 9 értékekre az ezres és tízezres helyen ugyanaz a jegy, a 8-as ismétlődik. Ez az

$$(n+3)^2 = n^2 + \left[3n + 3(n+3)\right]$$

azonossággal magyarázható. Ugyanis $3n + 3(n+3) = d'$ értéke rendre $99\,990 + 99\,999 = 199\,989 = 2 \cdot 10^5 - 11$, ill. $2 \cdot 10^5 + 7$ és $2 \cdot 10^5 + 25$, vagyis a növelés kerek százezrestől csak „kicsit" tér el. Így a megfelelő négyzetek között csak a 10^5 és esetleg a 10^6, másrészt az 1, 10 és esetleg a 10^2 értékű jegyekben van különbség, de a 10^3 és 10^4 értékű jegyekben nincs, ugyanis az N utolsó három jegyével írt 900 egyrészt nagyobb a d' első értékében szereplő 11-es kivonandónál, másrészt a három d' érték $6 \cdot 10^5 + 21$ összegében szereplő 21-gyel növelve sem éri el 10^8-t. Mivel N ezres jegye éppen 1-gyel kisebb a százasánál, azért a -11 tag hozzáadásával $j = 3$ esetén a százas is egyezik az ezressel, ugyanígy $j = 6$-nál is, mert $-11 + 7 < 0$; de már $j = 9$-nél a százas jegy ismét nagyobb az ezresnél, mert $-11 + 7 + 25 > 0$. Ezért van, hogy $j = 9$ esetén a második jegysorozat csak 2 tagú.

A $33\,331^2$-ben fellépő 555 jegysorozatbeli ismétlődést az magyarázza, hogy N ezres jegye 1-gyel kisebb a százasnál, és ezt a hiányt a $d = 66\,661$ százasának hozzáadásakor fellépő 1 maradék $(9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2 = 15 \cdot 10^2 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2)$ kiegyenlíti és ez a tízezresben is megismétlődik. Hasonlóan $33\,332^2$ azért örökli a 10^2, 10^3 és 10^4 értékű jegyek megegyezését $33\,331^2$-től, mert ebben a százas helyen álló 5 is 1-gyel kisebb a tízes helyen álló 6-nál, és ezt a hiányt $d = 66\,663$ hozzáadásakor a tízes oszlopból fellépő 1 maradék kiegyenlíti.

Ezek alapján megérthető a fenti elrendezés 2-ik és 3-ik oszlopában az 5-ös, ill. 2-es jegyek ismétlődése. Ugyanis a $j = 1$, 4, 7-hez és $j = 2$, 5, 8-hoz tartozó négyzeteken végigmenve d' értékében $2 \cdot 10^5$ után második tagként hozzá képest ismét kicsi tagok lépnek fel: -5 és $+13$, ill. $+1$ és $+19$. Ezért marad változatlanul a 10^4, 10^3, 10^2 helyen álló 555, ill. 222 jegyhármas, továbbá mert $61 > 5$ és $61 - 5 + 13 < 10^2$, ill. $24 + 1 + 19 < 10^2$, ahol 61 és 24 a $33\,331^2$ és $33\,332^2$ utolsó két jegyével írt szám.

Mármost a 8-as, 5-ös, ill. 2-es jegyek sorozatai N^*-ból a $\overline{33\ldots3j}^2, 1 \leqq j \leqq 9$ számokra is átöröklődnek, mert az alapban a 3-asok, az első két d-ben a 6-osok és N^*-ban a 8-asok száma ugyanannyival változik: 4-ről k-ra, ill. 3-ról $k-1$-re, és e jegysorozatok is ugyanazon értékű helyen végződnek, mint $k = 4$ esetén; továbbá a d'-beli $2 \cdot 10^5$ tag $2 \cdot 10^{k+1}$-re változik, ugyanis pl. a legkisebb tagban

$$\underbrace{99\ldots90}_{k} + \underbrace{99\ldots99}_{k+1} = (10^{k+1} - 10) + (10^{k+1} - 1) = 2 \cdot 10^{k+1} - 11.$$

E jegysorozatok jegyeinek száma a 3-nak megfelelő $k-1$, csupán a $33\ldots39^2$-ben a 2-nek megfelelő $k-2$.

A négyzetek elején álló 1-esek $k-1$ tagú sorozata pedig azért öröklődik át N^*-ból, mert a kilenc d mindegyike kisebb 10^{k+1}-nél, összegük kisebb 10^{k+2}-nél, és így N^* közbülső 0 jegye helyére is legfeljebb 1-es léphet.

Ezek szerint $33\ldots39^2$-ben egy k-tagú és egy $k-2$-tagú egymás utáni egyenlő jegyekből álló számjegysorozat lép fel, a többi kilenc négyzetben pedig mindkét jegysorozat tagjainak száma legalább $k-1$. $33\ldots30^2$-ben a második jegysorozat 1-gyel magasabb értékű helyen kezdődik és végződik, mint a többi nyolcban.

Összeállítva: *Gyüre Zsuzsanna* (Szeged, Tömörkény I. lg. I. o. t.),
Bresztyenszky Júlia (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)
és *Lipcsey Zsolt* (Budapest, Petőfi S. g. II. o. t.) dolgozataiból.