Előzetes megjegyzés. Kézenfekvő az a bizonyítás, melyben mindhárom kifejezést polinom alakra hozzuk, és rámutatunk, hogy így tagról tagra megegyeznek. Alább ennél rövidebb megoldásokat mutatunk be.

I. megoldás. Az első és a második kifejezésből úgy kapjuk a következőt, és a harmadikból is az elsőt, hogy minden a helyébe b-t, minden b, ill. c helyébe c-t, ill. a-t írunk, röviden mondva: a, b, c-t *ciklikusan felcseréljük.* Ebből következik, hogy a három kifejezés akkor és csak akkor azonos, ha bármelyikük polinom alakja az említett cserékkel önmagába megy át. Így már elég egyiküket polinommá alakítani: Az elsőből

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2-(a-c)(b-c)(a+b-c)=(a^3+b^3+c^3)-$$
$$-(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)+3abc.$$

Itt a jobb oldal a, b, c ciklikus felcserélésével önmagába megy át, tehát a kifejezések azonosak.

Soós András (Balatonfűzfő, Ált. isk. VIII. o. t.)

Megjegyzés. A kifejezéseknek a ciklikus felcseréléssel egymásba való átmenetele magában nem elég az azonossághoz. Ez a tulajdonságuk pl. az a, b, c „kifejezéseknek” is megvan, de nem azonosak.

II. megoldás. Az előzők után elég az első K kifejezést olyan három szorzat összegévé alakítani, melyek ciklikus felcseréléssel egymásba mennek át. Evégett a harmadik szorzat háromtagújával beszorzunk, – így K öt szorzat összege –, majd az 1. és 3., valamint 2. és 4. szorzat közös tényezőit kiemeljük:

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2-(a-c)(b-c)(a+b-c)=$$
$$=a(a-c)^2+b(b-c)^2-a(a-c)(b-c)-b(b-c)(a-c)+c(a-c)(b-c)=$$
$$=a(a-c)(a-c-b+c)+b(b-c)(b-c-a+c)+c(a-c)(b-c)=$$
$$=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b).$$

(Az utolsó lépésben a 3. szorzat két kéttagú tényezőjét (-1)-gyel szoroztuk.) Az utolsó alaknak megvan a kívánt tulajdonsága, tehát a bizonyítást befejeztük.

Bana Sándor (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

III. megoldás. Az I. megoldás észrevétele alapján elég megmutatni, hogy a három kifejezés közül bármelyik kettő különbsége azonosan 0. Tekintsük az első kettő különbségét, pl. a c változó $f(c)$ polinomjának (a és b pedig legyen egyelőre állandó).

$$f(c)=a(a-c)^2+b(b-c)^2-(a-c)(b-c)(a+b-c)-b(b-a)^2-$$
$$-c(c-a)^2+(b-a)(c-a)(b+c-a).$$

$f(c)$ legfeljebb 3-adfokú, így 0-val azonos, ha $3+1=4$ különböző helyen 0-val egyenlő. Legyenek e helyek $c=0$, $c=a$, $c=b$, $c=a+b$, ezek általában különbözők. Mármost

$$f(0)=[(a^3+b^3)-ab(a+b)]-[b(b-a)^2+a(b-a)^2]=(a+b)(a^2-$$
$$-ab+b^2-ab)-(b+a)(b-a)^2=(a+b)[(b-a)^2-(b-a)^2]=0;$$
$$f(a)=0+b(b-a)^2-0-b(b-a)^2-0+0=0;$$
$$f(b)=a(a-b)^2+0-0-b(b-a)^2-b(b-a)^2+(b-a)^2(2b-a)=$$
$$=(b-a)^2(a-b-b+2b-a)=0;$$
$$f(a+b)=a(-b)^2+b(-a)^2-0-b(b-a)^2-(a+b)b^2+2(b-a)b^2=$$
$$=b^2[a-(a+b)+2(b-a)]+b[a^2-(b-a)^2]=$$
$$=b^2(b-2a)+b(2a-b)b=0.$$

A vizsgált különbség hasonlóan akkor is 0-val azonosnak adódik, ha az a, vagy b változik és a további betűk állandók.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rácz László (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)