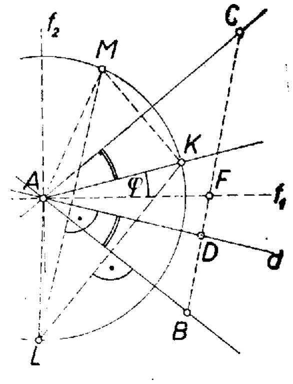
A bizonyítást arra az esetre végezzük, ha K a háromszög belsejében van; más helyzetekben a bizonyítás hasonlóan végezhető.



Az AK egyenessel együtt a BAC szög f_1, f_2 felezőire való tükörképe is átmegy az A csúcson (a két tükörkép egybeesik, mert $f_1 \perp f_2$), ezért először azt kell belátnunk, hogy LM-nek d felező merőlegese átmegy A-n. Valóban, a tükrözés folytán AB, AC merőlegesen felezi a KL, KM szakaszt, tehát a KLM háromszög köré írt kör középpontja A, és ezért d átmegy A-n. – Az f_1, és d, valamint f_1 és AK közti szögek egyenlőségéhez elég megmutatni, hogy d ugyanakkora szöget alkot AB-vel, mint AK az AC-vel. A d és AB közti szög egyenlő az LM és LK közti szöggel, mert megfelelő száraik merőlegesek, a KLM szög pedig a kerületi és középponti szögek tétele szerint fele a KAM szögnek, vagyis egyenlő KAC-vel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Böröczky Kálmán (Sopron, Kempelen F. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az előbbi szögek egyenlőségét így is beláthatjuk: AB, AC, AD (ahol D a BC és d metszése) felezi a KAL, KAM, LAM szöget. Így

$$DAB\sphericalangle = DAL\sphericalangle - BAL\sphericalangle = \frac{1}{2}MAL\sphericalangle - \frac{1}{2}KAL\sphericalangle =$$
$$= \frac{1}{2}(MAL\sphericalangle - KAL\sphericalangle) = \frac{1}{2}MAK\sphericalangle = CAK\sphericalangle.$$

Raskó János (Szolnok, Verseghy F. g. I. o. t.)

2. Szigorúan véve a fenti szögegyenlőségek csak akkor bizonyítják az állítást, ha tudjuk, hogy akár f-ből, akár AB, ill. AC-ből AD-be, ill. AK-ba egymással ellentétes irányú forgásokkal jutunk. Evégett az alábbi megoldásban a szögeket forgásoknak tekintjük, irányukat is számon tartjuk, vagyis előjeles szögekkel számolunk. Alapiránynak a BAC szög f_1 felezőjét választjuk. Legyen a BAC szög abszolút értéke 2ε (tehát $\varepsilon > 0$), és legyen a forgási irány az, amellyel f_1-ből AC-be ε, AB-be pedig $-\varepsilon$ forgás visz. Legyen továbbá az f_1-ből AK-ba vivő forgás φ (vagyis AK-ból f_1-be $-\varphi$ forgással jutunk).

Ekkor az AK-ból f_1-be és onnan AB-be vivő forgás $-\varphi$ $-\varepsilon$, innen tovább AL-be ugyancsak $-\varphi$ $-\varepsilon$. És mivel AK-nak AB-re való tükrözését a számításban két egymás utáni, egyenlő nagyságú forgatással fejezhetjük ki, azért az AK-ból AL-be vivő forgás -2φ -2ε. Az alapirányból pedig $\lambda = -2\varphi - 2\varepsilon - (-\varphi) = -\varphi - 2\varepsilon$ forgással jutunk AL-be.

Hasonlóan AK-ból f_1-en át AC-be $-\varphi + \varepsilon$ forgás visz, AC-ből AM-be ugyanennyi, f_1-ből AM-be pedig $\mu = 2(-\varphi + \varepsilon) - (-\varphi) = -\varphi + 2\varepsilon$.

Most már a LAM szög d felezőjébe f_1-ből

$$\frac{1}{2}(\lambda + \mu) = \frac{1}{2}(-\varphi - 2\varepsilon - \varphi + 2\varepsilon) = -\varphi$$

forgással jutunk, és ez mutatja, hogy a feladat állítása a forgási irányok figyelembevételével is helyes.

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VIII. o. t.)

3. Az ábrán a BC oldalt szaggatva rajzoltuk, látható ugyanis, hogy ennek semmi jelentősége nincs. Elég lett volna a BAC szögről beszélni.