I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy az N^2 négyzetszám N alapja 3-jegyű, tehát $N = A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + C$ alakban írható, ahol A, B, C az N számjegyei. Így négyzete

$$N^2 = A^2 \cdot 10^4 + 2AB \cdot 10^3 + (2AC + B^2)10^2 + 2BC \cdot 10 + C^2.$$

N^2 első 2-es jegye miatt $A^2 < 3$, tehát $A = 1$. A negyedik, 5-ös jegy helyi értéke 10, erre csak a $2BC \cdot 10$ és a C^2 tagok vannak befolyással. Közülük az első 20-szal osztható, ezért C^2 tízesének páratlannak kell lennie. A számjegyek négyzetei között csak $C = 4$ és $C = 6$ ilyen. Mindkettőben az egyes jegy 6, tehát N^2 utolsó jegye 6.

$C = 4$ esetén az utolsó két tag értéke $80B + 16$ és ez $100k + 56$ alakú, ahol k egész. Innen $80B = 100k + 40$, egyszerűsítve $8B = 10k + 4$, és mivel a 8-as szám szorzótábláján csak $3 \cdot 8$ és $8 \cdot 8$ végződik 4-re, azért $B = 3$, vagy 8. Így $N = 134$, vagy 184. Ezek négyzetében azonban az első jegy 1, ill. 3, tehát nem felelnek meg.

$C = 6$ esetén hasonlóan $120B + 36 = 100k + 56$-ból $12B = 10k + 2$, tehát $B = 1$, vagy 6, ezért $N = 116$ vagy 166. Az első nem felel meg, mert kisebb a fenti 134-nél. 166 megfelel: $166^2 = 27\,556$, ez a keresett szám.

Gáti Imre (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzés. Majdnem minden megoldás efféle úton jutott el az eredményhez. Az alábbi megoldás néhány eleme csak *Pázmándi László* (Budapest, József A. g. II. o. t.) megoldásában olvasható.

II. megoldás. Az adott jegyek alapján a keresett N^2 négyzetszámra $20\,050 \leq N^2 < 30\,000$, tehát pozitív négyzetgyökére $142 \leq N \leq 173$.

A negyedik jegy helyi értéke 10, ez tehát beletartozik N^2 „kétjegyű végződésébe”, vagyis az utolsó két jegyével írt számba, amely az alábbiak szerint egyszerű kapcsolatban áll az N alap kétjegyű végződésével. A továbbiakban az $N = 5k$ alakú számokat figyelmen kívül hagyjuk, mert ezekkel N^2 végződése 00, vagy 25, tehát tízes jegye nem 5-ös.

Az a és b egész számok négyzetének kétjegyű végződése akkor és csak akkor egyenlő, ha az $a^2 - b^2$ különbség 00-ra végződik, tehát $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 100k = 2^2 \cdot 5^2 k$. Így az $a-b$ és $a+b$ tényezők mindegyike páros, mert két egész szám összege és különbsége egyenlő párosságú – azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan – most pedig egyiküknek párosnak kell lennie. A szorzat két 5-ös tényezője viszont csak $a - b$ és $a + b$ egyikéből adódhat, mert az ellenkező feltevés, hogy ti. mindkét tényező 5-tel is osztható, $a - b = 10m$, $a + b = 10n$-re és folytatólag $a = 5(m + n)$-re, a kizárt esetre vezet. Eszerint vagy $a - b$, vagy $a + b$ osztható 50-nel. Mármost $a - b = 50p$-ből $a = b + 50p$, vagyis a kétjegyű négyzetvégződések az egész számokon 50-esével előrehaladva ismétlődnek, $a + b = 50r$-ből pedig $(a + b)/2 = 25r$, vagyis az olyan számok kétjegyű négyzetvégződései is egyeznek, melyek 25 valamely többszörösére „tükrösek”, vagyis ha $a = 25r + s$, akkor $b = 25r - s$.

Eszerint pl. az 1-től 24-ig terjedő, 5-tel nem osztható számok négyzetéből minden a 00 és 25-től különböző kétjegyű végződést megkaphatunk. Köztük csak egy olyan van, melynek tízes jegye 5, ez 16^2-ből az „56” négyzetvégződés. Ezt a négyzetvégződést adja még minden $16 + 50 = 66$-ra, $50 - 16 = 34$-re, és $100 - 16 = 84$-re végződő alap.

Eszerint N fenti korlátai, 142 és 173 között csak $N = 166$ felelhet meg, és mivel további adatunk (korlátozásunk) nincs rá, meg is kell felelnie.