a) Ha a szám minden számjegye 7, akkor jegyeinek száma tetszés szerinti lehet. Tegyük most fel, hogy minden jegy egy 7-től különböző j érték. Ekkor a szám egy csupa 1-essel leírt szám j-szerese és mivel j nem többszöröse 7-nek, azért a csupa 1-essel leírt szám osztható 7-tel. E szám jegyeinek számát úgy állapíthatjuk meg, hogy az ismeretlen hosszúságú $111\ldots 1$ számot osztjuk 7-tel, addig véve le az 1-eseket, míg 0 maradékra jutunk. Ez először a 6-ik 1-es levétele után következik be, de nyilvánvaló, hogy $12, 18, 24, \ldots$ jegyű osztandó esetén hasonlóan fennáll az oszthatóság, pl. $444\,444\,444\,444 = 4\cdot 7\cdot 15\,873\,015\,873$. Eszerint a kérdéses szám számjegyeinek száma $J = 6k$, ahol k pozitív egész szám. (Minden további betűvel is egy–egy pozitív egész számot jelölünk.)

$$\begin{array}{l}
1\;1\;1\ldots\;1 : 7 = 15873\\
\;\;4\;1\\
\;\;\;\;6\;1\\
\;\;\;\;6\;1\\
\;\;\;\;\;\;5\;1\\
\;\;\;\;\;\;\;\;2\;1\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

b), c) 43 és 41 esetén nem fordulhat elő, hogy a számjegy osztható velük, így mindegyik esetben az előzőhöz hasonló osztási eljárást alkalmazva azt kapjuk, hogy a 21-ik, ill. az 5-ik 1-es levétele után adódik először 0 maradék:

$$111\,111\,111\,111\,111\,111\,111 = 43\cdot 2\,583\,979\,328\,165\,374\,677, \quad 11\,111 = 41\cdot 271,$$

tehát a *b)* esetben $J = 21m$, a *c)*-ben $j = 5n$ a számjegyek száma.

d) A 301 osztó esetében felesleges a hasonló próba, ha észrevesszük, hogy $301 = 7\cdot 43$. Ha a szám csupa 7-essel van írva, akkor $J = 21\,m$ esetén fennáll az oszthatóság. Ha a jegyek nem 7-esek, akkor számuknak a 7-tel való oszthatóság végett $6k$, a 43-mal való oszthatóság végett pedig $21\,m$ alakúnak kell lennie, vagyis 6 és 21 közös többszörösének. Mivel 6 és 21 legkisebb közös többszöröse 42, és így minden közös többszörösük $42\,r$ alakú, azért valamennyi $jjj\ \ldots\ j$ alakú szám közül a $42r$ jegyűek oszthatók 301-gyel.

e) Hasonlóan kapjuk, hogy a 3-mal osztható, $jjj\ \ldots\ j$ alakú számoknak vagy minden jegyük $j = 3$, 6, 9, vagy jegyeik száma $3s$, mert $111 = 3\cdot 37$.

f) Mivel $21 = 3\cdot 7$, azért a csupa egyenlő jeggyel írt, 21-gyel osztható számoknak az *a)* és *e)* alatti feltételpár legalább egyik–egyik tagját ki kell elégíteniük. A feltételek nem függetlenek egymástól, ti. ha $j = 7$, akkor $j = 3$, 6, vagy 9 ki van zárva, és megfordítva is. Másrészt, ha *a)*-ból $J = 6k$, evvel *e)*-hez $J = 3s$ is teljesül és j értékének közelebbi megjelölése feleslegessé válik. Így a feltételek kombinációi közül csak a következő kettő különböző:

$$j = 7,\ \ J = 3s,\ \text{ vagy } j \neq 7,\ \ J = 6k.$$

Szabó László (Budapest, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A dolgozatok kerülő utakon állapították meg a J értékeket. Pl. az *a)* esetre a $J = 6$, ill. $6k$ értéket abból következtették ki, hogy az 1/7 tört a végtelen tizedes tört alakból közönségessé visszaalakítva 142 857/999 999-nek adódik, tehát $999\,999 = 9\cdot 111\,111 = 7\cdot 142\,857$, $111\,111 = 7\cdot 15\,873$, vagyis a 6 egyenlő jegyű számok megfelelnek. Ebből nem következik, hogy kevesebb jegyű számról nem lehet szó. Volt, aki érezte ezt és óvatosan így írt: „6 egyenlő jegyű szám *biztos* osztható 7-tel.” A feladat kérdésére: „hány jegye *lehet* a számnak...” ez elegendő is.

Mások „visszafelé való szorzással” építették ki a számokat. Pl. a csupa 1-essel írt, 7-tel osztható szám utolsó 1-ese miatta 7-edrészének, q-nak, egyes jegye 3, mert 7 többszörösei közül csak $3\cdot 7 = 21$ végződik 1-esre. Az itteni 2 tízeshez, „hogy 1 tízes legyen”, 9 tízest kell adni, 9-re $7\cdot 7$ végződik, tehát $q = \ldots 73$. Most $7\cdot 73 = 511$, az 5 százashoz 6 százast kell adni, 6-ra $7\cdot 8$ végződik, $q = \ldots 873$, és így tovább. Ez a „fordított” eljárás a fent adott osztáshoz hasonlóan vezet célra, ha nehézkesebben is; lehet viszont olyan kérdés, ahol csak ez vezet célra.