I. Tekintsük a $3/5$ törtet és próbálkozzunk egyik összeadandóként 2 reciprokával. (1 reciproka ugyanis még nagyobb $3/5$-nél.) Ha a $3/5-1/2$ különbség valamely természetes szám reciproka, akkor máris megoldást kaptunk. Valóban

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\ \text{tehát}\ \frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}.$$

3 reciprokával nem kapunk felbontást, mert $3/5-1/3=4/15$ reciproka nem természetes szám. 4 és nagyobb egész szám reciprokával felesleges tovább próbálkoznunk, mert $1/4$ kisebb $3/5$ felénél, $3/10$-nél, tehát a másik összeadandónak nagyobbnak kellene lennie $1/4$-nél, a természetes számnak pedig kisebbnek 4-nél. Így több felbontás nincs.

Hasonlóan

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}.$$

Itt az első felbontás tagjainak reciprokai: 4 és 20 kétszer akkorák, mint $3/5$ esetében a 2 és 10 számok. Ebből sejtjük, hogy minden $3/5n$ alakú tört, vagyis a $3/5$-nél n-szer kisebb szám – ahol n tetszés szerinti természetes szám – felírható a 2 és 10-nél n-szer nagyobb $2n$ és $10n$ természetes számok reciprokának összege gyanánt. Továbbá $3/10$ második felbontásának mintájára, ha n páros, $n=2k$ (k természetes szám) vagyis $5n=10k$, akkor $3/5n=3/10k$, az $5k$ és $10k$ számok reciproka összege gyanánt is felírható. Valóban

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{10n}=\frac{6}{10n}=\frac{3}{5n}\quad\text{és}\quad\frac{1}{5k}+\frac{1}{10k}=\frac{3}{10k}=\frac{3}{5\cdot 2k}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Tovább folytatva hasonlóan kapjuk: $3/15=1/5=1/6+1/30=1/10+$ $+1/10$, a második felbontás két tagja egyenlő. Általában $3/5n$ akkor egyenlő x reciprokának 2-szeresével, vagyis

$$\frac{3}{5n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\quad\text{ha}\quad x=\frac{10n}{3},$$

ez pedig akkor, és csak akkor egész, ha n többszöröse 3-nak.

$n=3k$ esetében még egy összegfelbontást adhatunk $3/5n$-re. Ilyenkor a $3/15,\ 3/30,\ 3/45,\ \ldots$ számok az $1/5,\ 1/10,\ 1/15,\ \ldots$ alakban írhatók, és ismeretes, hogy az

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}-\frac{k}{k(k+1)},\quad \frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+\frac{k}{k(k+1)}$$

azonosság alapján a $2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ számok reciproka felírható két nagyobb; különböző egész szám reciprokának összege gyanánt.

II. $3/5$ nem írható a kívánt alakú különbségként, mert a kisebbítendő csak az $5/3$-nál kisebb 1 reciproka lehetne, márpedig $1/1-3/5=2/5$, és ennek reciproka nem egész. Megmutatjuk viszont, hogy minden további adott szám előállítható a kívánt alakban. Erre az alábbiak szerint jöhetünk rá. $3/10$ esetében a kisebbítendő reciprokának kisebbnek kell lennie $10/3$-nál, így csak 1, 2, 3 jöhet szóba. Mármost

$$\frac{1}{1}-\frac{3}{10}=\frac{7}{10},\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},\quad \frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30},$$
$$\text{tehát}\quad \frac{3}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{30}.$$

Hasonlóan $3/15=1/5$ esetében

$$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15},\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20},$$
$$\text{tehát}\quad \frac{3}{15}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20};$$

$3/20$ esetében

$$1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20},\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{20}=\frac{14}{40}=\frac{7}{20},\quad \frac{1}{3}-\frac{3}{20}=\frac{11}{60},$$
$$\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10},\quad \frac{1}{5}-\frac{3}{20}=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},\quad \frac{1}{6}-\frac{3}{20}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60},$$
$$\text{tehát}\quad \frac{3}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{1}{6}-\frac{1}{60}.$$

Észrevesszük, hogy az

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{10},\qquad \frac{1}{x}-\frac{3}{15}=\frac{1}{x}-\frac{1}{5},\qquad \frac{1}{x}-\frac{3}{20}$$

különbségben, ha közös nevezőnek mindig a két nevező szorzatát vesszük, és x helyére sorra az $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ számokat helyettesítjük addig, amíg a különbség még pozitív, akkor (az esetleges egyszerűsítés előtti) számlálók szabályosan kisebbednek: 7, 4, 1, ill. 4, 3, 2, 1, ill. 17, 14, 11, 8, 5, 2. Az első két sorozat végén fellépett az 1-es számláló, a harmadikban pedig egyszerűsíthettünk 8, 5, ill. 2-vel, ezen múlt a felbontás lehetősége.

Általában az

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{5n}=\frac{5n-3x}{5nx} \tag{1}$$

alak számlálójának csökkenése x növekedésével 3 egységnyi lépésekben történik, így minden esetben eljutunk vagy a 3-as, vagy a 2-es, vagy az 1-es számlálóra.

Vegyük sorra e három lehetőséget. $5n-3x=3$ akkor adódik, ha van olyan x egész szám, amelyre $5n=3x+3=3(x+1)$, vagyis ha n osztható 3-mal, $n=3k$ alakú, ahol $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Ekkor (1) jobb oldala 3-mal egyszerűsíthető:

$$\frac{3}{5nx}=\frac{1}{5kx},\quad \text{másrészt}\quad x=\frac{5n-3}{3}=5k-1,\quad \text{és így}$$

$$\frac{3}{5n}=\frac{1}{5k}=\frac{1}{5k-1}-\frac{1}{5k(5k-1)}. \tag{2}$$

$5n-3x=1$ adódik, ha van olyan x egész szám, amelyre

$$x=\frac{5n-1}{3}=\frac{6n-(n+1)}{3}=2n-\frac{n+1}{3},$$

tehát ha $n+1$ osztható 3-mal: $n+1=3k$, vagyis $n=3k-1$, és ekkor $x=2n-k=5k-2$. Ekkor (1)-ből egyszerűsítés nélkül:

$$\frac{3}{5n}=\frac{3}{5(3k-1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{5nx}=\frac{1}{5k-2}-\frac{1}{5(3k-1)(5k-2)} \tag{3}$$

Végül $5n-3x=2$ adódik, ha

$$x=\frac{5n-2}{3}=n+\frac{2n-2}{3}=n+2\cdot\frac{n-1}{3},$$

tehát ha $n-1$ osztható 3-mal, $n-1=3k$, vagyis $n=3k+1$, és ekkor $x=n+2k=5k+1$. Ekkor (1) jobb oldala

$$\frac{2}{5nx}=\frac{2}{5(3k+1)(5k+1)}. \tag{4}$$

Ez páratlan k esetén egyszerűsíthető 2-vel, mert ilyenkor a nevező zárójeles tényezői párosak, ilyen volt $3/20$ esete, mert ott $5n=20$, $n=4=3\cdot 1+1$. Páros k esetén (4) nem egyszerűsíthető. Ekkor viszont a csökkenő számlálók sorozatának utolsó előtti tagja 5, ez a nevezőnek is tényezője, tehát egyszerűsítve 1-es számlálót kapunk. $n=3k+1$-gyel és $5n-3x=5$-tel

$$x=\frac{5n-5}{3}=\frac{5(n-1)}{3}=5k,\ \text{és (1) jobb oldala}\ \frac{5}{5nx}=\frac{1}{nx}=\frac{1}{5k(3k+1)}.$$

Ezek szerint a $3k+1$ alakú n számok esetére a

$$\frac{3}{5n}=\frac{3}{5(3k+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{nx}=\frac{1}{5k}-\frac{1}{5k(3k+1)} \tag{5}$$

felbontás mindig lehetséges, továbbá páratlan k, vagyis $k=2j+1$, és $n=3k+1=6j+4=2(3j+2)$ esetére $x=5k+1=10j+6=2(5j+3)$-mal és (4)-ből $2/5nx=1/[5(3j+2)(10j+6)]$-tal a következő felbontás is érvényes:

$$\frac{3}{5n}=\frac{3}{10(3j+2)}=\frac{1}{2(5j+3)}-\frac{1}{10(3j+2)(5j+3)}. \tag{5'}$$

Mivel minden n egész szám vagy a $3k$, vagy a $3k-1$, vagy a $3k+1$ alakban írható, azért $3/10$-től kezdve (2), (3), ill. (5) szerint valóban valamennyi adott szám írható két természetes szám reciprokának különbségeként. Az (5) felbontás azért nem érvényes a $3/5$ törtre, azaz $n=1$-re, mert akkor $k=0$, és a jobb oldalnak nincs értelme.

Pázmándi László (Budapest, József A. g. II. o. t.)