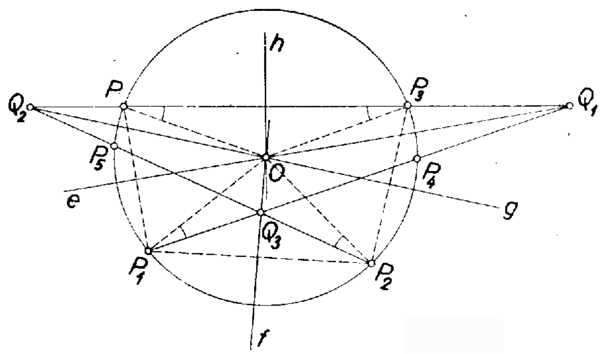
I. megoldás. Bizonyításunkat az 1. ábrán látható helyzethez kapcsoljuk; e, f, g és P más kölcsönös helyzetében az állítás hasonlóan bizonyítható.



1. ábra

Q_1P_1, és Q_2P_2 metszéspontját Q_3-mal jelölve elég belátnunk, hogy a $P_1P_2Q_3\triangle$ egyenlő szárú: $Q_3P_1 = Q_3P_2$; így ugyanis Q_3 a P_1P_2 szakasz felező merőlegesén van, ami pedig a tükrözésnél fogva az f egyenes. – Már most a tükrözés folytán $OP = OP_1 = OP_2 = OP_3$, tehát az $OPP_3\triangle$ egyenlő szárú, és h tengelye átmegy O-n. Így az

$$OP_1Q_3,\ OP_1Q_1,\ OPQ_1,\ OPP_3,\ OP_3P,\ OP_3Q_2,\ OP_2Q_2,\ OP_2Q_3$$

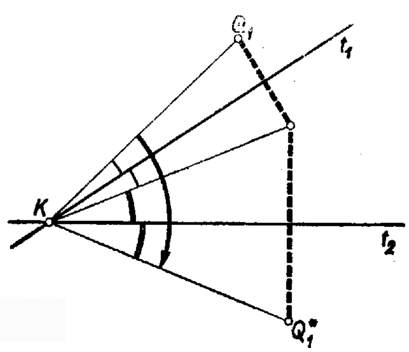
szögek sorozatában (a 2-iktól kezdve) mindegyik egyenlő az előtte állóval, mert váltakozva vagy csupán ugyanazon szögnek más jelöléssel való megadásáról van szó, vagy a szomszédos szögek egymásnak rendre e, h, g-re tükörképei. Innen $OP_1Q_3\sphericalangle = OP_2Q_3\sphericalangle$, az OP_1P_2 egyenlő szárú háromszögből $OP_1P_2\sphericalangle = OP_2P_1\sphericalangle$, ezekből kivonással $Q_3P_1P_2\sphericalangle = Q_3P_2P_1\sphericalangle$, tehát a $Q_3P_1P_2\triangle$ valóban egyenlő szárú.

Kádár Levente (Mezőkövesd, I. László g. II. o. t.)

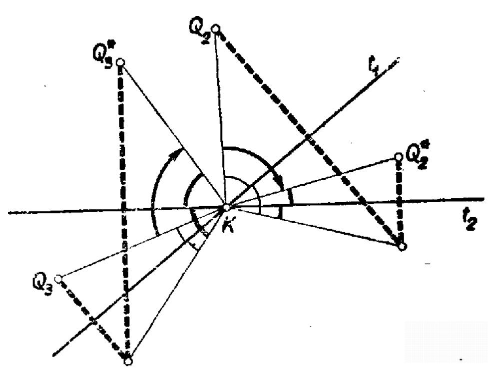
Megjegyzés. Lényegében ugyanezt a bizonyítást mondjuk el más szavakkal, ha arra hivatkozunk, hogy $PP_1P_2P_3$ húrnégyszög (hurkolt is lehet), és a PP_1Q_1, $P_2P_3Q_2$ háromszögek egyenlő szárúak.

Keviczky László (Ráckeve, Ady E. g. II. o. t.)

II. megoldás. Folytassuk a tükrözést, és legyen P_3 képe e-re P_4, P_4 képe f-re P_5, és P_5 képe g-re P_6. Ekkor P_6 egybeesik P-vel. Ismeretes ugyanis, hogy két metsző tengelyen való egymás utáni tükrözés eredményét az a forgatás is megadja, melynek középpontja a tengelyek közös pontja, szöge pedig 2-szer akkora és olyan forgási irányú, mint az 1. tengelyt a 2-ba vivő forgás (lásd a 2–3. ábrán a Q pontok átvitelét Q^*-ba; állításunk akkor is érvényes, ha t_1-et ellentétes irányban, tompa szöggel forgatjuk t_2,-be).

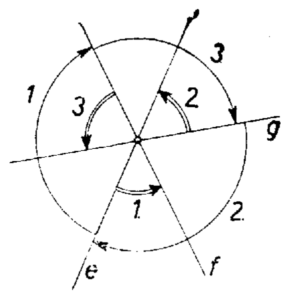


2. ábra



3. ábra

Eszerint a 6 tükrözés eredménye helyettesíthető 3 forgatással az O körül és a forgatás szöge rendre az e-t f-be, g-t e-be és f-et g-be vivő forgatás 2-szerese. E 3 forgatás összege egyetlen forgatás O körül. A 3-ik forgatást 2-iknak véve, a 3 forgás összege annyi, amennyi e-t e-be viszi, ezért értéke 180°, vagy 360° (4. ábra), így kétszerese 360°, vagy 720°, tehát valóban $P_6 = P$.



4. ábra

Megmutatjuk, hogy a kérdéses Q_3 pont a P_1P_4 és P_2P_5 egyenesek közös pontja. Ugyanis P_4 és P_3 tükrösek e-re, ezért P_3-on átmenő Q_1P-nek e-re vett Q_1P_1 tükörképe átmegy P_4 en, másrészt Q_1P_1 a Q_3 egyik meghatározója, tehát P_1P_4 átmegy Q_3-on. Ugyanígy P_5 és P tükrösek g-re, ezért a P-n átmenő Q_2P_3-nak g-re vett Q_2P_2 tükörképe átmegy P_5-ön, másrészt Q_3-on, tehát P_2P_5 átmegy Q_3-on. És mivel P_1 és P_2, valamint P_4 és P_5 pontok az f-re tükrösek, ezért ez áll a P_1P_4 és P_2P_5 egyenesekre is, így pedig közös Q_3 pontjuk f-en van.

Kiss Gábor (Debrecen, Kossuth L. gyak g. II. o. t.).

Megjegyzés. Biztosra vettük, hogy Q_1P_1 és Q_2P_2 nem párhuzamosak, a Q_3 pont létezik. Tekintsük most a $Q_1Q_3Q_2$ szöget. e, f, g felezi a $Q_1Q_3Q_2\triangle$ szögeit. Így az $OQ_1Q_2\triangle$ szögeit rendre ω, φ_1, φ_2-vel jelölve $Q_1Q_3Q_2\sphericalangle = 180° - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = 2\omega - 180°$. Eszerint $\omega = 90°$, más szóval $e \perp g$ esetén a $Q_1Q_2Q_3\triangle$ nem jön létre, Q_1P_1 és Q_2P_2 párhuzamosak f-fel. – Akkor is elfajult eset adódik, ha a PP_3 egyenes átmegy O-n, továbbá, ha P_1 éppen f-en adódik. Ilyenkor nincs mit bizonyítani, mert $Q_1 \equiv Q_2 \equiv= O$, ill. $P_2 \equiv P_1$, és így Q_3 az O-ba, ill. P_1-be esik, ami valóban f-en van. Ha pedig P az e-n van, továbbá, ha P_3 éppen g-n adódik, akkor egyeneseink egyike határozatlan.