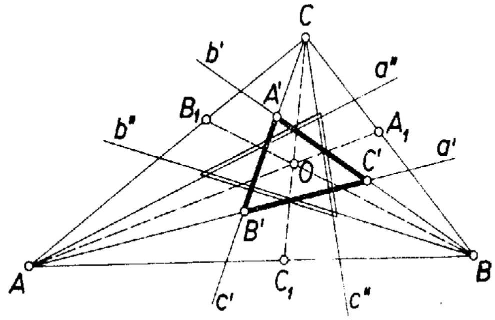
Legyen az A, B, C csúcsból kiinduló első harmadoló rendre a', b', c', a második harmadoló rendre a'', b'', c'', továbbá az a', b' félegyenes–pár metszéspontja C', a b', c', ill. c', a' pár metszéspontja A', ill. B'. Meg kell keresnünk az $ABC = H$ és $A'B'C' = H'$ háromszögek szögei közti összefüggéseket. Ehhez tisztáznunk kell H és H' egymáshoz viszonyított helyzetét. Megmutatjuk, hogy H' a H belsejében van, éspedig mindegyik első harmadoló egyenesének azon az oldalán, mint a szög csúcsából kiinduló második harmadoló (mint félegyenes); pl. H' az a'-nek azon az oldalán van, mint a''. Legyen az A, B, C-ből kiinduló belső szögfelezőknek a szemben fekvő oldalon levő metszéspontja A_1, B_1, C_1, és a szögfelezők közös pontja O.



Ekkor a' a BAA_1 szögtartományban, b' a CBB_1 szögtartományban van, így C' ezek közös részében, az A_1OB háromszögben van, amely az ABC háromszögnek része. Hasonlóan A' a B_1OC, B' pedig a C_1OA háromszög belsejében van. Ebből azt is látjuk, hogy pl. a'-n és b'-n a pontok sorrendje A, B', C', ill. B, C', A', tehát C' valóban szétválasztja B és A'-t.

Eszerint H'-nek a C'-nél levő γ' szöge az ABC' háromszög külső szöge, tehát a szokásos jelölésekkel $\gamma' = (\alpha + 2\beta)/3$. Hasonlóan az A'-nél, B'-nél levő szög $a' = (\beta + 2\gamma)/3$, ill. $\beta' = (\gamma + 2\alpha)/3$. – Feltehetjük, hogy H' adott szögei a' és β', így α, β, γ-ra a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\beta + 2\gamma = 3\alpha', \tag{1}$$

$$\gamma + 2\alpha = 3\beta, \tag{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \tag{3}$$

(2)-ből $\gamma = 3\beta' - 2\alpha$, ezzel (1)-ből $\beta = 3\alpha' - 6\beta + 4\alpha$, és mindkettővel (3)-ból:

$$\alpha = 60^\circ - \alpha' + \beta', \quad \text{tehát} \quad \beta = 240^\circ - \alpha' - 2\beta, \ \ \gamma = -120^\circ + 2\alpha + \beta'. \tag{4}$$

E képletek mindegyikében α' és β' együtthatói különbözők, így az adott számértékeket α' és β' számára mindkét sorrendben figyelembe kell vennünk.

$$\alpha' = 45^\circ \text{ és } \beta = 55^\circ \quad \text{mellett:} \quad \alpha = 70^\circ, \quad \beta = 85^\circ, \quad \gamma = 25^\circ, \tag{5}$$

$$\alpha' = 55^\circ \text{ és } \beta = 45^\circ \quad \text{mellett:} \quad \alpha = 50^\circ, \quad \beta = 95^\circ, \quad \gamma = 35^\circ, \tag{6}$$

Így H-ra két megoldást kaptunk, ezekben H' körüljárása egymással ellentétes.

Az a'', b'', c'' harmadolók által alkotott H'' háromszög szögeire a fentiekhez hasonlóan

$$a'' = (2\beta + \gamma)/3, \quad \beta'' = (2\gamma + \alpha)/3, \quad \gamma'' = (2\alpha + \beta)/3,$$

ennélfogva (4) alapján mindegyiket α' és β'-vel kifejezve

$$\alpha'' = \big[(480^\circ - 2\alpha' - 4\beta') - 120^\circ + 2\alpha' + \beta'\big]/3 = 120^\circ - \beta',$$
$$\beta'' = \alpha' + \beta' - 60^\circ, \qquad \gamma'' = 120^\circ - \alpha'.$$

Ezek szerint α' és β' sorrendjét felcserélve α'' és γ'' felcserélődnek, β'' viszont változatlan marad. Más szóval H'' szögei a H-ra kapott két megoldásban egyenlők, körüljárásuk azonban ellentétes. A szögek értéke, nagyság szerint rendezve: 40°, 65°, 75°.

Deák István (Budapest, Vörösmarty M. g. I. o. t.)