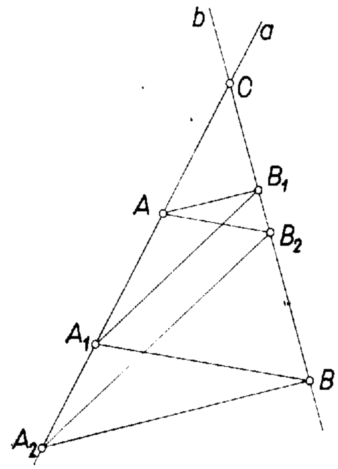
I. Tegyük fel, hogy a és b metszik egymást O-ban; ekkor nyilvánvaló, hogy a szóban forgó pontok mindegyike O-túl különböző. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor B_1 és B_2 az O-nak ugyanazon oldalán van, mint B. Ekkor A_1 és A_2 is azon az oldalán van O-nak, mint A. Ugyanis pl. az AB_1 és BA_2 párhuzamosok a síkot két félsíkra és egy síksávra osztják és O az egyik félsíkon van, – mert nincs rajta a sávba eső B_1B szakaszon – ezért az AA_2 szakaszon sincs rajta, tehát A és A_2 az O-nak ugyanazon az oldalán van (1. ábra).



1. ábra

Az OAB_1 és OA_2B háromszögek hasonló helyzetűek, mert oldalegyeneseik páronként egybeesnek, ill. párhuzamosak. Ugyanez az OA_1B, OAB_2 háromszögpárra is áll, O mindkét háromszögpárnak külső hasonlósági pontja. Így a megfelelő oldalpárok aránya egyenlő:

$$\frac{OA}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB},\quad \text{ill.}\quad \frac{OA_1}{OA}=\frac{OB}{OB_2}.$$

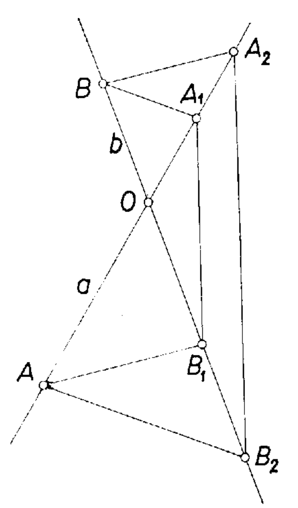
Innen, a bal, ill. jobb oldalakat összeszorozva

$$\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB_2}.$$

Másrészt a fentiek szerint az OA_1B_1 és OA_2B_2 háromszögek O-nál levő szöge közös, tehát e két háromszög hasonló, és hasonló helyzetű, – O ezeknek is külső hasonlósági pontja, – ezért harmadik oldalaik párhuzamosak. Ezt kellett bizonyítanunk.

U_2 kezdő-, ill. végpontja egybeesik U_1 vég-, ill. kezdőpontjával, így a két útvonalat egymás után bejárva az $AB_1A_1BA_2B_2A=U_3$ útvonalban olyan zárt, hurkolt hatszöget kapunk, melynek szemben levő oldalai párhuzamosak. Ez további kétféleképpen bontható fel olyan útvonalpárra, melyek ugyanannyiadik szakaszai párhuzamosak, pl. $A_1BA_2B_2=U_1'$ és $B_2AB_1A_1=U_2'$. Ezekben feltevésünk szerint az első és a 2-ik útszakaszpárok párhuzamosak, és bizonyításunkból a 3-ik szakaszpár párhuzamossága következik, – vagyis az állítás megfelelően átfogalmazva is érvényes.

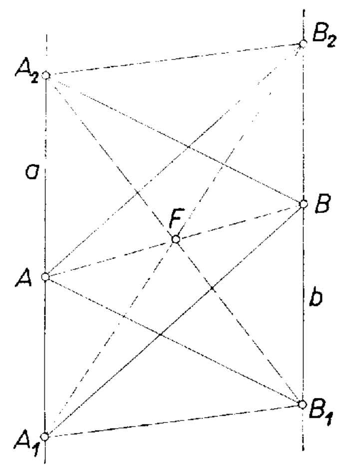
Amikor B_1 és B_2 az O-nak B-vel ellentétes oldalán van, a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy O az A-t is elválasztja A_2 és A_1-től. Az előbbi esetre kimondott hasonlóságok itt is érvényesek, módosulás csak az, hogy a szögek csúcsszögek és O a két háromszögpárnak belső hasonlósági pontja. És mivel az OA_1B_1 és OA_2B_2 háromszögek O-nál levő szöge ismét közös, azért A_1B_1 és A_2B_2 párhuzamossága ugyanúgy következik az előzőkből, mint a fenti esetben (2. ábra).



2. ábra

Hasonlóan látható be az állítás azokban az esetekben, ha O a B_1-et, ill. B_2-t választja külön B és B_2-től, ill. B és B_1-től.

II. Ha a és b párhuzamosak, akkor az AB_1BA_2 és AB_2BA_1 négyszögek paralelogrammák, közös középpontjuk az AB átló F felezőpontja. Így A_1 és B_2, valamint A_2 és B_1 az F-re tükrösek, az $A_1A_2B_2B_1$ négyszög paralelogramma, tehát $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (3. ábra).



3. ábra

Dobó Ferenc (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzés. A bebizonyított tételnek a mechanikában az ún. kötélsokszögek elméletében fontos szerepe van. – Felhasználható a tétel arra is, hogy megszerkesszük azt az egyenest, amely egy pontból két egyenesnek a véges rajzlapról kieső metszéspontja felé irányul.

M. I.