1. Írhatjuk, hogy egyrészt

$$y=\frac{x+9}{x-1}=\frac{x-1+10}{x-1}=1+\frac{10}{x-1},\quad \text{másrészt}\quad x=\frac{1}{2}\cdot n, \tag{1}$$

ahol $n=3,\ 4,\ 5,\ \ldots$, azaz $n\geq 3$, egész szám. Most már y akkor és csak akkor egész, ha

$$y-1=\frac{10}{x-1}=\frac{10}{0{,}5(n-2)}=\frac{20}{n-2} \tag{2}$$

egész, azaz ha $n-2$ a 20-nak osztója. A fenti korlátozás szerint $n-2\geq 1$, tehát szóba jövő értékei: $n-2=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$. Így $n=3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12,\ 22$, és $x=1{,}5;\ 2;\ 3;\ 3{,}5;\ 6,\ 11$. Ezekkel rendre $y=21;\ 11;\ 6;\ 5;\ 3;\ 2$, valóban egész.

2. Az egyszerűsítés vizsgálata előtt le kell szögeznünk, mit tekintünk egyszerűbb alaknak pl. $x=2{,}5$ esetén: a kisebb számokkal írt 11,5/1,5-öt, vagy az ezzel egyenlő 23/3-ot, amely nagyobb, de egész számokat tartalmaz, amabból $0{,}5=1/2$-del való „egyszerűsítéssel” áll elő. A szokottabb 23/3-ot vesszük egyszerűbbnek, mert a „törtet egyszerűsíteni” kifejezés hallgatólag közönséges tört alakot tételez fel, tehát két egész szám hányadosát.

Ebben az értelemben mindig egyszerűsíthetünk, ha x az $1/2$-nek páratlan többszöröse, vagyis ha n páratlan, így kaptuk az általános (2) alakot is. Ez tovább akkor és csak akkor egyszerűsíthető, ha $n-2$ osztható 5-tel, vagyis $n=10k+7$, ahol $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Egész x-ekre (1)-ből adódik, hogy 2-vel minden páratlan x mellett, 5-tel pedig $x=5j+1$ mellett egyszerűsíthetünk. A mindkét lehetőséget felmutató $x=10j+1$ számok esetén 10-zel egyszerűsíthetünk.

3. *a)* $y>5$, ha $y-1>4$, vagyis (2)-ből

$$\frac{20}{n-2}>4,\quad \frac{n-2}{20}<\frac{1}{4},\quad n-2<5,\quad n<7,\quad \text{vagyis}\quad n=3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

az ilyen értékek száma 4.

b) Hasonlóan $y\leq 3$ áll minden olyan esetben, ha $n\geq 12$; ilyen n-érték végtelen sok van.

c) A (2) alak szerint x (vagyis n) növekedésével y csökken. Ezért a $1{,}5\leq y\leq 2{,}5$ előírásnak megfelelő x-eket úgy kapjuk, hogy először az *a)* eset mintájára, de egyenlőséget is megengedve megkeressük az $y\geq 1{,}5$-et adó n-ek számát, majd pontosan az *a)* eset mintájára mellőzzük az $y>2{,}5$-et adó n-eket. Az előbbiből $n_1\leq 42$, ilyen érték 40 van, az utóbbiból $n_2<46/3<16$, az ennek megfelelő értékek száma 13, tehát $40-13=27$ megfelelő x érték van.

Csűrös Miklós (Nagykőrös, Arany J. g. II. o. t.)