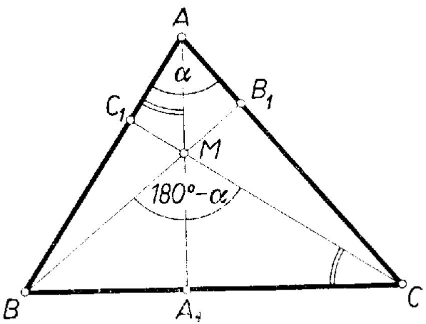
I. megoldás: Elég az állítást a szokásos jelölésekkel pl. az AM távolságra megmutatni, vagyis hogy $AM = a$ ctg α, ha $\alpha \leq 90°$, és $AM = a$ ctg $(180° - \alpha)$, ha $\alpha > 90°$.

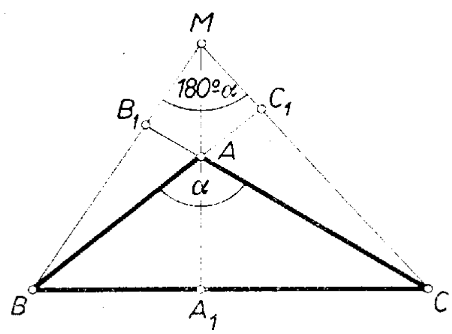
Ha $\alpha < 90°$, akkor β és γ-nak legalább az egyike szintén hegyesszög, legyen ez β. Ekkor C-nek az AB egyenesre való C_1 vetülete – ami egyszersmind M vetülete is – A és B közé esik, és ctg $\alpha = AC_1/CC_1$ (1. ábra).



1. ábra

Az MAC_1 és BCC_1 derékszögű háromszögek hasonlók, mert A, ill. C-nél levő (hegyes) szögük szárai páronként merőlegesek. Így $MA : AC_1 = BC : CC_1$, ebből pedig

$$MA = BC\frac{AC_1}{CC_1} = BC \text{ ctg } \alpha.$$



2. ábra

Ha pedig $\alpha > 90°$ (2. ábra), akkor – mint a 637. gyakorlat[1] megoldásában láttuk – az MBC háromszög hegyesszögű, és magasságpontja A, és így az előző eset szerint $AM = BC$ ctg α', ahol α' a BMC szöget jelöli. Ez pedig egyenlő a külső szögével, $180° - \alpha$-val, ugyanis az MB_1AC_1 négyszögben szemben fekszik a csúcsszögével, és összegükre $180°$ marad, mert a szemben fekvő B_1 és C_1-nél levő szögek összege szerkesztésnél fogva két derékszög.

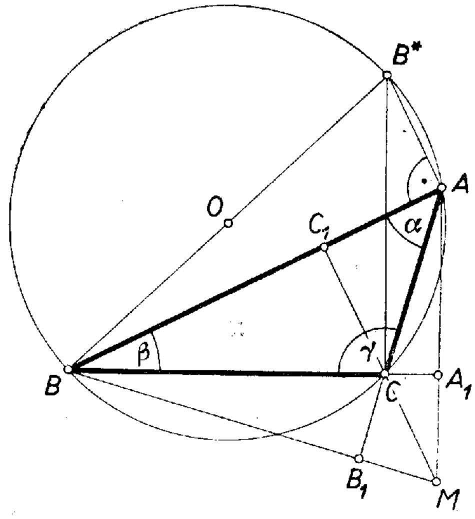
Végül $\alpha = 90°$ esetén egyrészt M az A-ba esik, így $MA = 0$, másrészt ctg $\alpha = 0$, tehát az állítás ekkor is igaz.

Majoros László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

A dolgozatoknak kb. fele két szög függvényeit és a szinusz-tételt használta fel – esetleg burkoltan – vagyis a szükségesnél erősebb eszközökkel dolgozott. Közülük több ún. második megoldás. Márpedig egyszerűbb megoldás után egy bonyolultabb második megoldásnak nincs értéke; az ilyenre többnyire nem adunk külön pontot. A következő megoldás a trigonometriából ismét csak a $90°$-nál nem nagyobb szög kotangensének meghatározását használja fel.

II. megoldás: Megmutatjuk az állítás helyességét M-nek egy hegyesszögű és egy tompaszögű csúcstól való távolságára. Feltehetjük, hogy β hegyesszög. Tekintsük a háromszög körülírt körében a B-ből kiinduló átmérő másik végpontját, B^*-ot. Thalész tétele szerint $B^*A \perp BA$, tehát $B^*A \parallel CM$; hasonlóan $B^*C \parallel AM$, így az $AMCB^*$ négyszög paralelogramma, $AM = B^*C$, és $CM = B^*A$ (3. ábra).

[1]Lásd K. M. L. 22 (1961) 110. o.



3. ábra

Hegyesszög esetén, mint ábránkon α, a B^* ugyanazon a BC íven van, mint A, ezért $BB^*C\sphericalangle = \alpha$, és így a BB^*C derékszögű háromszögből $AM = B^*C = BC$ ctg α.

Tompaszög esetén pedig, mint ábránkon γ, a B^* a C-t nem tartalmazó AB íven van, ezért $BB^*A\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ (hegyesszög), és így a BB^*A derékszögű háromszögből $CM = B^*A = BA$ ctg $(180^\circ - \gamma)$.