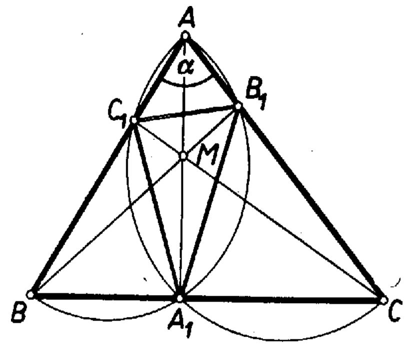
Állapítsuk meg általában, hogy milyen összefüggés áll fenn egy tetszés szerinti ABC háromszög és az ennek $A_1B_1C_1$ talpponti háromszöge szögei között. Ebben felhasználjuk, hogy bármelyik oldal két végpontjából kiinduló magasságok talppontjai rajta vannak az illető oldal mint átmérő fölé írt Thalész–körön, így e négy pont húrnégyszöget határoz meg.

Hegyesszögű háromszög esetén (1. ábra) mindhárom talppont a megfelelő oldal belsejében van, így pl. az AA_1 magasság a B_1, C_1 talppontokat szétválasztja, és ezért a $B_1A_1C_1$ szög a B_1A_1A és AA_1C_1 szögek összege.



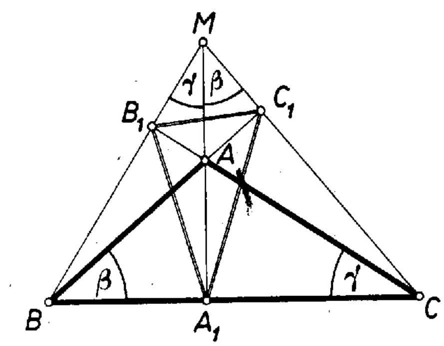
1. ábra

Az AB és AC átmérők fölötti Thalész–körben a kerületi szögek tétele alapján

$$B_1A_1A\sphericalangle = B_1BA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha, \quad AA_1C_1\sphericalangle = ACC_1 = 90^\circ - \alpha,$$

és így $B_1A_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. *Hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének szögei rendre egyenlők az eredeti háromszög szögei pótszögeinek 2-szeresével.*

Tompaszögű háromszög M magasságpontja kívül esik a háromszögön – a 2. ábrán $BAC\sphericalangle = \alpha > 90^\circ$ – és M az A-ból húzott magasságnak a csúcson, a B és C-ből húzott magasságnak pedig a talpponton túli meghosszabbításán van.



2. ábra

Így M a hegyesszögek B, C csúcsával hegyesszögű háromszöget alkot, – ugyanis

$$MBC\sphericalangle = B_1BC\sphericalangle = 90^\circ - \gamma < 90^\circ, \text{ ugyanígy } \quad MCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta < 90^\circ, \text{ és}$$
$$BMC\sphericalangle = BMA_1\sphericalangle + A_1MC\sphericalangle = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha < 90^\circ,$$

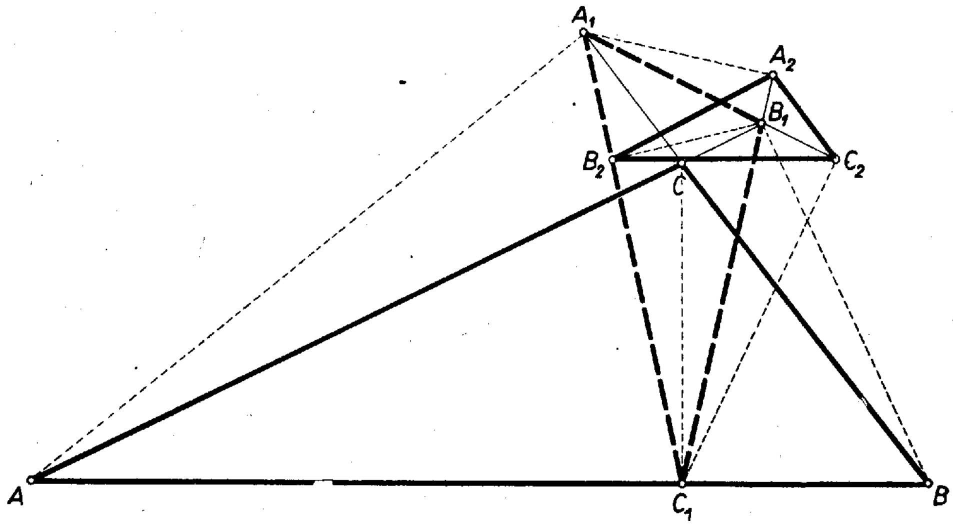
és az MBC háromszög talpponti háromszöge egybeesik az ABC háromszögével, az M, B és C-ből húzott magasság talppontja rendre A_1, C_1, B_1. Így az előzők alapján:

$$B_1A_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - 2BMC\sphericalangle = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ,$$
$$A_1B_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - 2MCB\sphericalangle = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta,$$
$$A_1C_1B_1\sphericalangle = 180^\circ - 2MBC\sphericalangle = 180^\circ - 2(90^\circ - \gamma) = 2\gamma.$$

Eszerint *tompaszögű háromszög talpponti háromszögének két szöge 2-szer akkora, mint az eredeti háromszög megfelelő hegyes szöge, a harmadik pedig 180°-kal kisebb a tompaszög 2-szeresénél.*

(Derékszögű háromszögben a magasságtalppontok nem alkotnak valódi háromszöget.)

Mármost az adott H háromszög tompaszögű, mert első két szögének összege kisebb a harmadiknál. Egyszerűség kedvéért legyen a legkisebb szög δ, ekkor a további kettő 2δ, 4δ, és összegük $7\delta = 180^\circ$. Így a fentiek szerint T_1-ben A_1-nél 2δ, B_1-nél 4δ, C_1-nél pedig $8\delta - 180^\circ = \delta$ nagyságú szög van. Így H és a belőle leszármaztatott T_1 hasonlók, mert szögeik egyenlő párokba kapcsolhatók. Ebből következik, hogy T_1 és a belőle ugyanazon eljárással–leszármaztatott T_2 is hasonlók, tehát T_2 a H-hoz is hasonló. Ugyanígy H-nak bármely sorszámú talpponti háromszöge hasonló H-hoz (3. ábra).



3. ábra

Megmutatjuk, hogy T_2 és H-nak B_2C_2 és AB oldala párhuzamos. Ehhez elég belátni, hogy $C_2B_2C_1$ és A_1C_1A váltószögek, vagyis a B_2C_2 és C_1A félegyenesek T_1 megfelelő $C_1A_1 = b_1$ oldalának C_1B_2 szakaszával ugyanakkora szöget zárnak be, továbbá hogy b_1-nek ellentétes oldalán vannak. E két szöget meghatározó ponthármasok szerkesztésüknél fogva egymás megfelelői. Ugyanis a fenti két hasonlóságot így is kimondhatjuk: a T_1 és T_2 hat csúcsából álló pontrendszer hasonló a H és T_1 hat csúcsából álló pontrendszerhez. És mivel H és T_1 hasonlóságában A, B, C-nek rendre az ugyanakkora szög C_1, A_1, B_1 csúcsa felel meg, ugyanígy T_1 és T_2 hasonlóságában A_1, B_1, C_1-nek sorra C_2, A_2,B_2, azért a T_1, T_2 rendszer

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2$$

csúcsai egymás után a H, T_1, rendszer

$$B,\ C,\ A,\ B_1,\ C_1,\ A_1$$

csúcsainak felelnek meg, és így valóban $C_2B_2C_1\sphericalangle = A_1C_1A\sphericalangle$. – C_1 az AB szakaszon van, A_1 pedig BC-nek C-n túli meghosszabbításán, ezért B és C a b_1-nek A-val ellentett oldalán vannak, továbbá B_1 és C_2 is, mert B_1 az AC oldal C-n, C_2 pedig az A_1B_1 oldal B_1-en túli meghosszabbításán van; eszerint B_1 valóban szétválasztja A_1-et és C_2-t. Így fennáll, hogy $B_2C_2 \parallel AB$. – Hasonlóan $C_2A_2 \parallel BC$. Végül $B_2A_2B_1\sphericalangle = C_1B_1C\sphericalangle$, továbbá B_2 és C a B_1C_1 egyenes ugyanazon oldalán vannak, ezért a szögek egyállásúak: $A_2B_2 \parallel CA$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A G háromszög egyenlő szárú és tompaszögi, mert kisebb szögeit ε-nal jelölve a nagyobb 8ε, és ez nagyobb $\varepsilon + \varepsilon$-nál. Így a szögek összegéből $10\varepsilon = 180^\circ$. Talpponti háromszögének, U_1-nek szögei 2ε, 2ε és $16\varepsilon - 180^\circ = 6\epsilon$, így ez is tompaszögű, ennélfogva második talpponti háromszögének, U_2-nek szögei 4ε, 4ε, 2ε, ez tehát hegyesszögű. Továbbmenve U_2 első két szöge $180^\circ - 8\varepsilon = 2\epsilon$, a harmadik $180^\circ - 4\varepsilon = 6\varepsilon$, vagyis U_3 hasonló U_1-hez és hasonlóan U_4 hasonló U_2-höz. Így G minden páratlan sorszámú talpponti háromszöge U_1-hez hasonló, a páros sorszámúak pedig U_2-höz, tehát egyik sem hasonló G-hez.

Kövessi Ágnes (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. II. o.t.)