I. Legyen R_1 és R_2 oldalainak száma n_1, ill. n_2, így az egy oldalukhoz tartozó középponti szög fokban vett mértékszáma $360/n_1$, ill. $360/n_2$, tehát az adatok szerint egyrészt

$$n_2 - n_1 = p, \tag{1}$$

másrészt

$$\frac{360}{n_1} - \frac{360}{n_2} = \gamma, \quad \text{másképpen} \tag{2}$$

$$\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} = \frac{\gamma}{360}. \tag{2a}$$

Innen n_2 kiküszöbölésével

$$n_1^2 + pn_1 - \frac{360p}{\gamma} = 0.$$

Az n_1-et nem tartalmazó tag negatív – ugyanis p-t és γ-t természetesen pozitívnak tekintjük –, ezért egyrészt a diszkrimináns pozitív, tehát a gyökök valósak, másrészt – mivel ez a tag a két gyök szorzatával egyenlő – a gyökök ellentett előjelűek. Feladatunkban csak pozitív egész gyöknek van értelme, ezért a megoldás a diszkrimináns pozitív négyzetgyökével

$$n_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 + \frac{1440p}{\gamma}}\right), \quad \text{és így} \quad n_2 = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{\frac{p^2 + 1440p}{\gamma}}\right), \tag{3}$$

hacsak e két kifejezés egész számot ad, és n_1 értéke legalább 3.

A számadatokkal $n_1 = 30$, $n_2 = 35$. Valóban, így az egy oldalhoz tartozó középponti szög 12°, ill. $360^\circ/35 = 72^\circ/7$, és az előbbi többlete $12^\circ/7$.

II. Adott p esetén γ lehetséges értékeit a $(2a)$ és (1)-ből előálló

$$\gamma = \frac{p}{n_1(n_1+p)} 360 \tag{4}$$

kifejezés adja meg, ha n_1 helyére a 3, 4, 5, ... számokat helyettesítjük, ugyanis R_1 oldalainak száma legalább 3. Az adódó γ-értékek csökkenő sorozatot alkotnak, mert (4)-ben a számláló állandó, a nevező pedig növekvő. Az adott $p = 2$-vel

$$\gamma = 48^\circ,\ 30^\circ,\ 20\frac{4}{7}^\circ,\ 15^\circ,\ 11\frac{3}{7}^\circ,\ 9^\circ,\ 7\frac{3}{11}^\circ,\ 6^\circ,\ \ldots \tag{5}$$

III. (2)-ből látható, hogy megoldás csak racionális γ mellett várható.

$$\frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_1} - \frac{\gamma}{360} = \frac{360 - n_1\gamma}{360 n_1}, \quad \text{és így}$$

$$n_2 = \frac{360 n_1}{360 - n_1\gamma}, \tag{6}$$

ennélfogva (1)-ből – ismét $n_1 = 3, 4, 5, \ldots$ mellett – akkor kapunk a feladatnak megfelelő p-t, ha (6) pozitív egésznek adódik. A pozitívsághoz szükséges, hogy álljon

$$360 - n_1\gamma > 0, \qquad \text{azaz} \qquad n_1 < \frac{360}{\gamma}.$$

Eszerint (6) egész voltát a

$$3 \le n_1 < \frac{360}{\gamma} \tag{7}$$

értékek mellett kell megvizsgálnunk. Minden egész n_2 esetén egy megfelelő p-értéket kapunk (1)-ből.

Pl. $\gamma = 30^\circ$ mellett (7)-ből $3 \le n_1 < 12$ és (6)-ból

$$n_2 = \frac{12 n_1}{12 - n_1} \quad \text{és} \quad p = n_2 - n_1 = \frac{n_1^2}{12 - n_1}$$

egész, ha

$$\begin{aligned} n_1 &= 3, 4, 6, \ \ 8, \ \ 9, 10, \ \ 11, \ \text{és így} \\ p \ &= 1, 2, 6, 16, 27, 50, 121. \end{aligned}$$

Hasonlóan $\gamma = 12^\circ$ mellett $3 \le n_1 < 30$, $n_2 = 30n_1/(30-n_1)$, $p = n_1^2/(30-n_1)$ és a megfelelő n_1, n_2, p értékhármasok a következők:

$$\begin{aligned} n_1 &= 5,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 21,\ \ 24,\ \ 25,\ \ 26,\ \ 27,\ \ 28,\ \ 29,\\ n_2 &= 6,\ 15,\ 20,\ 30,\ 45,\ 60,\ 70,\ 120,\ 150,\ 195,\ 270,\ 420,\ 870,\\ p\ &= 1,\ \ 5,\ \ 8,\ 15,\ 27,\ 40,\ 49,\ \ 96,\ 125,\ 169,\ 243,\ 392,\ 841. \end{aligned}$$

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) helyébe más kifejezést kapunk abból, hogy a (3)-beli négyzetgyök alatt teljes négyzetnek kell állania, így

$$p^2 + \frac{1440p}{\gamma} = q^2 \qquad \text{és} \qquad \gamma = \frac{1440p}{q^2 - p^2},$$

ahol q a p-nél nagyobb és vele egyenlő párosságú olyan egész szám, amelyre (3)-ból $2n_1 = q - p \ge 6$, tehát $q \ge p + 6$. Így $q = p+6$, $p+8$, $p+10$, $p+12$, $\ldots$. (Ugyanis (3)-ból n_1 és n_2 akkor és csak akkor egész, ha a négyzetgyökhöz akár p-t, akár $-p$-t adva páros számot kapunk.) $p = 2$-vel $\gamma = 2880/(q^2-4)$, ahol $q = 8, 10, 12, 14, \ldots$. Így ismét (5)-re jutunk.

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. II. o. t.)

2. Többen a (3) általános megoldás helyett mindjárt a számpélda eredményét számították ki. Mivel a feladat első kérdése a számadatok előtt fejeződik be, azért – gondos olvasó előtt – nyilvánvaló, hogy a választ általában kell megadni, és ebbe az eredménybe kell az adatokat behelyettesíteni. – Ezúttal is több dolgozat indokolatlanul „egész–szám–kultuszt űzött”: a számpélda ellenére γ-ról feltette, hogy egész szám. Az ilyen dolgozatok nem teljes megoldások.