I. Azok az n (egész) számok k jegyűek, amelyekre $10^{k-1} \le n < 10^k$. Mivel $2^{100} = N$ nem lehet 10 hatványa, hiszen utolsó jegye nem 0, azért elegendő azt megállapítanunk N-ről, hogy a 10-nek mely két szomszédos hatványa közé esik.

Könnyen kiszámítható, hogy $2^{10} = 1024$ (kisebb hatvány kiszámítását a feladat nem tiltja), ennélfogva $2^{10} > 1000 = 10^3$. Mindkét oldalt 10-ik hatványra emelve $2^{100} > 10^{30}$, eszerint N legalább 31 jegyű, mert 10^{30} a legkisebb 31 jegyű szám.

Megmutatjuk, hogy N pontosan 31-jegyű, mert $N < 10^{31}$. Mivel $N = \left(1{,}024 \cdot 10^3\right)^{10} = 10^{30} \cdot 1{,}024^{10}$ így $1{,}024^{10}$-re kell alkalmas (10-nél kisebb) felső korlátot keresnünk. Elég lesz 1,024 helyett a nála nagyobb 1,1 szám 10-edik hatványát vizsgálnunk. Minden hatványt fölfelé kerekítve egy tizedes jegyre

$$1{,}1^2 = 1{,}21 < 1{,}3, \quad \text{így} \quad 1{,}1^4 < 1{,}3^2 = 1{,}69 < 1{,}7,$$
$$1{,}1^5 = 1{,}1^4 \cdot 1{,}1 < 1{,}7 \cdot 1{,}1 = 1{,}87 < 1{,}9, \qquad 1{,}1^{10} < 1{,}9^2 = 3{,}61.$$

Így valóban

$$N = 1{,}024^{10} \cdot 10^{30} < 1{,}1^{10} \cdot 10^{30} < 3{,}61 \cdot 10^{30} < 10^{31}.$$

II. Az utolsó 3 számjegy meghatározásához megjegyezzük, hogy két egész szám szorzatának utolsó 3 jegyét a tényezők ezres és magasabb helyi értékű jegyei nem befolyásolják. Valóban legyen a két tényező A és B, az utolsó 3 jegyükkel leírt szám A_1, ill. B_1, vagyis $A = 10^3C + A_1$, $B = 10^3D + B_1$, ahol C és D alkalmas pozitív egész szám. Elegendő belátnunk, hogy az $E = AB - A_1B_1$ különbség többszöröse $1000 = 10^3$-nak. Valóban

$$E = \left(10^3C + A_1\right)(10^3D + B_1) - A_1B_1 = \left(10^3CD + A_1D + B_1C\right)10^3 = F \cdot 10^3,$$

ahol F pozitív egész szám.

A bebizonyított állításból $B = A$-val adódik, hogy pozitív egész szám négyzetének utolsó három jegyét úgy kaphatjuk, hogy vesszük a szám utolsó három jegyéből álló szám négyzetének utolsó három jegyét.

A fentiek szerint 2^{10} utolsó három jegyével írt szám 024, eszerint a 2^{20} utolsó három jegyével írt szám $24^2 = 576$; a 2^{40} utolsó három jegyével írt szám $576^2 = 331\,776$-ból 776; a 2^{80} utolsó három jegyével írt szám $776^2 = 602\,176$-ból 176, végül $2^{100} = 2^{80} \cdot 2^{20}$ utolsó három jegyével írt szám $176 \cdot 576 = 101\,376$-ból 376. Ezek szerint N utolsó három jegye: 3, 7, 6.

III. Ahogyan az utolsó három jeggyel írt számokat számítottuk, ugyanúgy számíthatjuk az említett hatványok értékét is. Ennélfogva N-et $2^{10} = 1024$-ből kiindulva 3 négyzetreemeléssel, majd egy szorzással kaphatjuk. Egyébként 2^{10}-et is hasonlóan számíthatjuk: $2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = \left[\left(2^2\right)^2\right]^2 \cdot 2^2$.

Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzések. I. Az $N < 10^{31}$ egyenlőtlenség bizonyítására számtalan különböző út lehetséges. Bemutatunk néhány olyat, amely a fentitől különböző lépésekben, alkalmas fogásokkal jut el a 100-ik hatványhoz.

$$a) \quad 2^{11} = 2{,}048 \cdot 10^3 < 2{,}1 \cdot 10^3, \quad \text{ezért} \quad 2^{33} = \left(2^{11}\right)^3 < 2{,}1^3 \cdot 10^9 =$$
$$= 9{,}261 \cdot 10^9 < 10^{10}, \quad \text{innen} \quad 2^{99} < 10^{30}, \quad \text{végül} \quad 2^{100} < 2 \cdot 10^{30} < 10^{31}.$$

Góth László (Budapest, Könyves Kálmán Gimn. II. o.t.)

$$b) \quad 2^{100} = 2^9 \cdot 2^{91} = 512\left(2^{13}\right)^7 < 1000 \cdot 8192^7 < 10^3 \cdot \left(10^4\right)^7 = 10^{31}.$$

Tasnády Mária (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. I. o. t.)

$$c) \quad 2^9 = 512 < 625 = 5^4, \quad \text{innen} \quad \text{7-ik hatványra emeléssel} \quad 2^{63} < 5^{28}, \quad \text{tehát}$$
$$2^{100} = 2^{63} \cdot 2^{37} < 5^{28} \cdot 2^{37} = 10^{28} \cdot 2^9 = 512 \cdot 10^{28} < 10^{31}.$$

Kóta József (Tatabánya, Árpád Gimn. II. o. t.)

d) Végül a feladatot kitűzésre javasló tanuló bizonyítása:

$$1{,}024^{10} < 1{,}025^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} = \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} <$$
$$< \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdot \frac{38}{37} \cdot \frac{37}{36} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{35}{34} \cdot \frac{34}{33} \cdot \frac{33}{32} \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 2 < 10,$$

mert ha $a > b > 1$, akkor

$$\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}.$$

2. A 2^{100} hatvány kiszámítható 6 négyzetreemeléssel és ezt követő 2 szorzással is; $2^{100} = 2^{64} \cdot 2^{32} \cdot 2^4$ és itt $2^4 = \left(2^2\right)^2$, továbbá $32 = 2^5$ és $64 = 2^6$ alapján az első két tényező a 6-ik, ill. 5-ik négyzetre emelés eredménye.