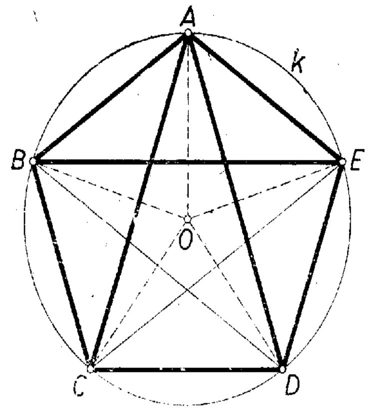
I. megoldás: Megmutatjuk, hogy az $ABCDE = P$ ötszög minden csúcsánál ugyanakkora szög van. Eszerint az ötszög szabályos, mert szabályos sokszögnek az olyan konvex sokszöget nevezzük, amelynek valamennyi oldala, továbbá valamennyi szöge egyenlő.



A B, E, A csúcsnál levő szögek egyenlők. Ezek ugyanis egyszersmind az ACB, ADE, ill. BEA háromszögnek is szögei. E háromszögek egybevágók, mert egy oldaluk a feltevésben szereplő AC, AD, ill. BE átló, további két oldaluk pedig P-nek két oldala, így bármelyik két háromszög oldalai páronként egyenlők. A tekintetbe vett szögek a háromszögeknek az említett átlókkal szemben fekvő szögei, tehát egyenlők.

P-nek C és D-nél levő szögei is egyenlők, mert a CA, DA átlók két-két páronként egyenlő részre osztják őket. Ugyanis egyrészt az előbbi egybevágóságok folytán $BCA\sphericalangle = EDA\sphericalangle$, másrészt a CDA háromszög egyenlőszárú, így $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle$, ezért összeadással valóban $BCD\sphericalangle = EDC\sphericalangle$.

Végül P-nek a B és D-nél levő szögei is egyenlők. Meghúzva ugyanis a BD átlót egyrészt a BDA és DBE háromszögek egybevágók, mert BD oldaluk közös, további oldalaik pedig a feltevés szerint egyenlők, ezért $ABD\sphericalangle = EDB\sphericalangle$; másrészt a BDC háromszög egyenlő szárú, $DC = BC$, és ezért $DBC\sphericalangle = BDC\sphericalangle$. Így összeadással $ABC\sphericalangle = EDC\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk. Ezek szerint

$$AED\sphericalangle = EAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = EDC\sphericalangle = BCD\sphericalangle.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csepella Imre (Szeged, Radnóti M. Gimn. II. o. t)

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy az $ABCDE = P$ ötszög köré k kör írható. Így – k középpontját O-val jelölve – az AOB, BOC, COD, DOE, EOA háromszögek egybevágók, O-nál levő szögeik egyenlők. Ezeket ω-val jelölve P bármely csúcsából a további 4 csúcs közti 3 oldal a kerületi és középponti szögek tétele alapján $\omega/2$ szögben látszik. Ezért P mindegyik szöge $3\omega/2$.

Mármost az ABC és ABE egyenlőszárú háromszögek fentebb látott egybevágósága folytán $ACB\sphericalangle = AEB\sphericalangle = \varepsilon$, és így C és E az AB szakasz ε nyílásszögű látószög-körívén van, vagyis A, B, C, E egy k_1 kör pontjai. Ugyanígy az AE szakasz B és D-ből ε szögben látszik, ezért E, A, B, D egy k_2 kör pontjai. E két kör pedig azonos, mert A, B és E pontjaik közösek. A további C, ill. D pontokkal P minden csúcsáról beláttuk, hogy rajta van e körön. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Zalán F. Árpád (Aszód, Petőfi S. Gimn. II. o. t.)