A törteket közös nevezőre hozva a közös nevező, a nevezők legkisebb közös többszöröse, általában a nevezők szorzata, és így a számláló általában harmadfokú. Az egyenlet azokra az x értékekre teljesülhet csak, amelyekre ez a számláló eltűnik. (Teljesül is a számláló mindazon gyökeire, amelyekre egyik tört nevezője sem tűnik el.) Így az egyenlet megoldásához általában a harmadfokú egyenletekre vonatkozó ismeretek szükségesek.

Elvégezhető azonban a közös nevezőre hozás már legfeljebb másodfokú számlálóval, ha az A, B, C, D számok valamelyike 0. Ezt így is kifejezhetjük: $ABCD=0$ (a szorzat valóban akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0). A közös nevező harmadfokú lesz, ha valamelyik nevező nem tartalmazza x-et, aminek szükséges és elégséges feltétele

(2) $$mprt=0.$$

Ez azonban nem vonja maga után a számláló fokszámának csökkenését, ha csak a kérdéses együtthatók egyike (pl. m) tűnik el, és a megfelelő számláló (A) nem 0, mert ekkor A-t a nevezők legkisebb közös többszörösével, tehát harmadfokú polinommal szorozzuk. Csökken azonban a számláló fokszáma, ha m, p, r, t közül két együttható eltűnik.

Csökken a számláló fokszáma akkor is, ha két (vagy több) nevezőnek van az x-et tartalmazó közös osztója. Ez akkor következik be, ha az

$$m\left(x+\frac{n}{m}\right),\quad p\left(x+\frac{q}{p}\right),\quad r\left(x+\frac{s}{r}\right),\quad t\left(x+\frac{u}{t}\right)$$

alakokban a zárójelbeli második tagok között kettő egyezik, pl. $n/m-q/p=a$. Ekkor ugyanis a megfelelő két törtet összeadva egyetlen az eredetiekhez hasonló törtet kapunk:

$$\frac{A}{mx+n}+\frac{B}{px+q}=\frac{\frac{A}{m}}{x+a}+\frac{\frac{B}{p}}{x+a}=\frac{\frac{A}{m}+\frac{B}{p}}{x+a}=\frac{E}{x+a},$$

tehát a bal oldalon ismét legfeljebb három tag marad, mint az 1. esetben. A kapott feltételt annak alapján önthetjük algebrai alakba, hogy két szám akkor és csak akkor egyenlő, ha különbségük 0. A fenti 4 számból 6 különbség képezhető, ennélfogva a feltételt így írhatjuk: az (1) egyenlet nem lesz harmadfokú, ha (2) nem áll fenn, viszont

$$F=\left(\frac{n}{m}-\frac{q}{p}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{s}{r}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{u}{t}\right)\left(\frac{q}{p}-\frac{s}{r}\right)\left(\frac{q}{p}-\frac{u}{t}\right)\left(\frac{s}{r}-\frac{u}{t}\right)=0.$$

A nevezőket $m^3p^3r^3t^3$-nel való szorzás útján eltávolítva a feltétel így írható:

(3) $$F'=m^3p^3r^3t^3F=(np-mq)(nr-ms)(nt-mu)(qr-ps)(qt-pu)(st-ru)=0.$$

Könnyű látni, hogy ez a feltétel akkor is teljesül, ha m, p, r, t közül legalább kettő eltűnik, vagy ha csak egy tűnik el közülük, de a másik három nevező közül van kettőnek közös 0-helye (tehát x-et tartalmazó közös osztója.)

Lehetséges, hogy az egyszerűsödést csak a harmadfokú polinom összevonása után vesszük észre abból, hogy x^3 együtthatója eltűnik:

$$Aprt+Bmrt+Cmpt+Dmpr=0.$$

Ezt $mprt$-vel osztva a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{A}{m}+\frac{B}{p}+\frac{C}{r}+\frac{D}{t}=0.$$

Lehetséges, hogy a törtek eltávolítása után a harmadfokú polinom nem tartalmaz állandó tagot, ezért belőle x kiemelhető, tehát az $x=0$ gyök könnyen felismerhető és leválasztható:

(4) $$Aqsu+Bnsu+Cnqu+Dnqs=0.$$

Ilyenkor a leválasztás után visszamaradó egyenlet legfeljebb másodfokú. Egyébként $x=0$ csak akkor lehet gyöke (1)-nek, ha nem szerepel a valamelyik nevezőt 0-vá tevő értékek között, vagyis ha n, q, s, u egyike sem 0. Ekkor (4)-et $nqsu$-val osztva a feltételt így is írhatjuk:

(4a) $$\frac{A}{n}+\frac{B}{q}+\frac{C}{s}+\frac{D}{u}=0.$$

Ez az alak közvetlenül fejezi ki azt a tényt, hogy (1)-be $x=0$-t helyettesítve a két oldal egyenlő.

Végül, ha harmadfokú egyenleten szűkebb értelemben a „vegyes” harmadfokú egyenletet értjük, amelyben 0-tól különböző az állandó, a harmadfokú tag együtthatója, továbbá az első- és a másodfokú tag közül legalább az egyiknek az együtthatója, – akkor egyenletünk minden olyan esetben is megoldható, ha az adódó egyenlet bal oldalán x^2 és x együtthatója 0. Ilyenkor ugyanis az egyenlet valós gyöke puszta köbgyökvonással kifejezhető.

Ha valamelyik feltételből látjuk, hogy az egyenlet a harmadfokú egyenletre vonatkozó ismeretek nélkül is megoldható, akkor a megoldás egyszerűen végrehajtható.

Kóta József (Tatabánya, Árpád Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Kóta József dolgozata megvizsgálja azt is, hogy az összevonással adódó harmadfokú kifejezés 0-helyei milyen esetekben kereshetők meg az első két tagnak teljes köbbé kiegészítésével, továbbá mikor van az első két tag összegének és az utolsó kettőnek elsőfokú közös osztója. Ezeknek a feltételét már igen bonyolultan lehet az eredeti együtthatókkal kifejezni.