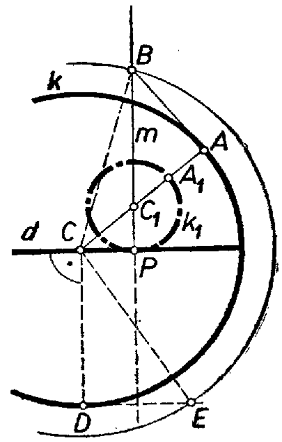
I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak és legyen k középpontja C, a keresett k_1 kör középpontja C_1. Nyilvánvaló, hogy az adott P-vel együtt k_1 a k belsejében van, ezért a CC_1 szakasz C_1-en túli meghosszabbításának k_1-gyel, k-val való metszéspontját A_1-gyel, ill. A-val jelölve k_1-nek k-hoz legközelebbi pontja A_1, és a kérdéses távolság $AA_1 = A_1C_1 = C_1P$ (1. ábra).



1. ábra

C_1 az érintés folytán a d-re P-ben állított m merőlegesen van. Húzzuk meg k-nak A-beli érintőjét, és messe ez m-et B-ben. A BAC_1 és CPC_1 derékszögű háromszögek hasonlók, mert C_1-nél levő szögeik csúcsszögek. Innen

$$BA : CP = AC_1 : C_1P = (AA_1 + A_1C_1) : C_1A_1 = 2 : 1,$$

tehát

$$BA = 2CP.$$

Ennek alapján k_1 szerkesztése a következő. A k egy tetszés szerinti D pontjában húzott érintőre felmérjük a $DE = 2CP$ szakaszt; C körül CE sugárral segédkört írunk, ennek metszéspontja m-mel B; B-ből érintőt szerkesztünk k-nak ahhoz az ívéhez, amely m-nek C-vel ellentétes partján van, az érintési pont A; CA-val m-ből kimetsszük C_1-et; C_1 körül C_1P sugárral kört írunk, ez k_1.

k_1 teljesíti a követelményt, mert egyrészt $m \perp d$ folytán érinti d-t. Másrészt $CB = CE$ folytán a CAB és CDE derékszögű háromszögek egybevágók, ezért $AB = DE = 2CP$, így a két egyenlő szöggel rendelkező s így hasonló BAC_1 és CPC_1 derékszögű háromszögekből

$$AC_1 : PC_1 = BA : CP = 2 : 1,$$

tehát $AC_1 = 2PC_1$ és így $AA_1 = AC_1 - A_1C_1 = 2PC_1 - PC_1 = PC_1$.

Ha P különbözik C-től és d végpontjaitól, akkor a szerkesztés mindig végrehajtható és 2 megoldást ad, ezek d-re tükrösek. Ha ugyanis D-nek a d-re merőleges átmérő egyik végpontját választjuk, akkor E egyik lehetséges helyzete a D-nek m-re való tükörképe, ennélfogva m szétválasztja a segédkör C középpontját és E kerületi pontját, tehát metszi a segédkört. B-hez A és A-hoz C_1 szerkesztése egyértelmű.

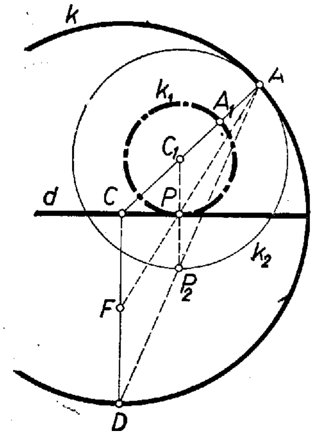
Eljárásunk akkor is kitűzi A-t, ha P azonos C-vel, de így $d \perp CA \equiv m$. Ekkor C_1 nyilván a d-re merőleges sugárnak C-től számított első harmadoló pontja. Ha pedig P a d végpontja, akkor k_1 ponttá fajul el, mert P közös pontja k és k_1-nek, ezért legrövidebb távolságukkal együtt a k_1 kör sugara 0.

Minkó Béla (Budapest, I. László g. II. o. t.)

Megjegyzés. A szerkesztés akkor is végrehajtható, ha P kívül van k-n. Az az A pont felel meg, amely közelebb van m-hez, amelyre a CA félegyenes metszi m-et.

Sonnevend György (Celldömölk, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

II. megoldás: Használjuk tovább is az I. megoldás jelöléseit. Írjunk C_1 körül A-n átmenő, vagyis 2 C_1P sugarú k_2 kört, és legyen ennek a C_1P félegyenessel közös pontja P_2 (2. ábra).



2. ábra

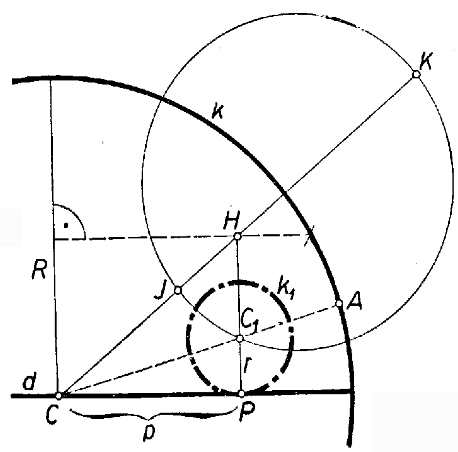
Ekkor P felezi a C_1P_2 szakaszt, k_2 és k az A-ban érintkeznek, ezért az A hasonlósági centrumra nézve hasonló helyzetűek, és P_2 megfelelője a d-re merőleges átmérőnek az a D végpontja, amely d-nek A-val ellentétes partján van. Így az AC_1P_2 és ACD háromszögek is hasonló helyzetűek az A centrumra, és P megfelelője a CD sugár F felezőpontja.

Ennek alapján A-t az FP egyenes metszi ki k-ból, az a metszéspont veendő, amely a CF egyenes ugyanazon oldalán van, mint P.

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi Ilona lg. I. o. t.)

Az alábbi megoldás a következő tételen alapszik: azon pontok mértani helye, melyekre a két adott ponttól mért távolságok aránya adott, 1-től különböző állandó: kör, az alappontokhoz és az arányszámhoz tartozó ún. Apollóniosz-kör. A tétel könnyen bizonyítható. [1]

III. megoldás: Mérjük fel m-re P-től C_1 irányába a $PH = CA/2$ szakaszt, a k kör sugarának felét (3. ábra).



3. ábra

Ekkor

$$HC_1 = HP - C_1P = \frac{CA}{2} - \frac{C_1A}{2} = \frac{CC_1}{2},$$

vagyis $HC_1 : CC_1 = 1 : 2$. Eszerint C_1 rajta van a H és C alappontokkal és az $1 : 2$ aránnyal meghatározott Apollóniosz-körön, éspedig ha a k belsejében levő P-re szorítkozunk, akkor C_1 e körnek k belsejében levő ívén van. (Az Apollóniosz-kör egy átmérője az a JK szakasz, amelynek J végpontja a CH szakasznak H-hoz közelebbi harmadoló pontja, K végpontja pedig C-nek H-ra való tükörképe; ezekre ugyanis teljesül az előírt arány, másrészt a kör nyilván szimmetrikus CH tengelyre.)

Kóta József (Tatabánya; Árpád g. II. o. t.)

A legtöbb versenyző számítás alapján szerkesztette meg a kört. Ilyen a következő

[1] Lásd pl.: *Surányi János:* Hasonlóság és szerkesztés, 34. o., „Tanulj jobban!" könyvsorozat, Orsz. Neveléstudományi Intézet, Bpest, 1949.

IV. megoldás: Legyen k és k_1 sugara R, r, és $CP = p(p < R)$. Ekkor a középpontok CC_1 távolsága a $2r = C_1A = CA - CC_1 = R - CC_1$ követelményből $CC_1 = R - 2r$. Így a CPC_1 derékszögű háromszögből Püthagorász tétele alapján

$$(R-2r)^2 - r^2 - p^2 = 3r^2 - 4Rr + (R^2 - p^2) = 0, \tag{1}$$

és innen

$$r = \frac{2R \pm \sqrt{R^2 + 3p^2}}{3}.$$

Mindkét gyök pozitív, mert a diszkrimináns pozitív és $4R/3$ összegük, valamint $(R^2 - p^2)/3$ szorzatuk pozitív. Számunkra csak a kisebb gyök felel meg, mert a nagyobb gyökre fennáll

$$r = \frac{2R + \sqrt{R^2 + 3p^2}}{3} > \frac{2R + R}{3} = R,$$

ez pedig lehetetlen.

A kisebb gyök szerkesztése: Legyenek a d átmérő végpontjai L, M, legyen P tükörképe C-re Q, és a PQ oldalra szerkesztett szabályos háromszög harmadik csúcsa N. Ekkor $CN = \sqrt{3}p$, és így $LN^2 = R^2 + 3p^2$, tehát LN-et L-ből M felé rámérve d-re és a végpontot S-sel jelölve r-et az MS szakasz harmadrésze adja.

Bede Andrea (Budapest, Szilágyi E. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy az (1) egyenlet nagyobb gyökével $CC_1 = -(R - 2r) = 2r - R$ teljesül, vagyis $CC_1 + R = 2r$, eszerint k-nak k_1-től legtávolabbi pontja van annyira k_1-től, mint k_1 sugara.

2. Meg lehet mutatni, hogy a III. megoldásban adott szerkesztés a C_1P szakaszban (1) kisebb gyökét állítja elő, az Apollóniosz-körnek m-mel való, k-n kívül eső metszéspontja pedig annyira van P-től, mint (1)-nek nagyobb gyöke.