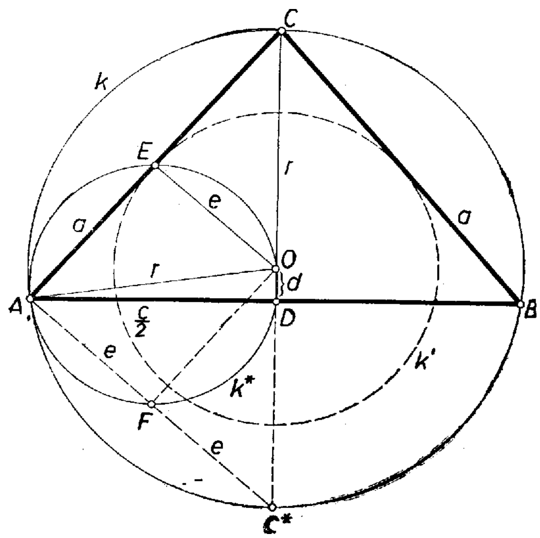
*Előzetes megjegyzés:* A legtöbb versenyző három derékszögű háromszögre alkalmazta a Püthagorász-tételt, az így kapott egyenletrendszerből számította ki előbb a körülírt kör sugarát, majd az oldalakat, és ezek alapján végezte el a szerkesztést. A sugárra adódott másodfokú egyenletnek csak a pozitív gyökét értelmezték. Elsőnek egy ilyen megoldást mutatunk be.

**I. megoldás:** Legyen a háromszög köré írt $k$ kör $O$ középpontjának vetülete $AB$-n $D$, $AC$-n $E$, vagyis $OD = d$, $OE = e$, legyen továbbá $AB = c$, $AC = BC = a$ és $OA = r$. Az $OAD$, $OAE$ és $ACD$ derékszögű háromszögekből – feltéve, hogy $O$ a háromszög belsejében van, más szóval, hogy $C$-nél hegyes szög van (1. ábra)




*1. ábra*

(1) $$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2 - d^2,$$

(2) $$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 - e^2,$$

(3) $$(r+d)^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

ugyanis így a háromszögnek a tengelybe eső magassága $r + d$. Célszerű (1) és (2) alapján $a$-t és $c$-t kiküszöbölni (3)-ból:

$$(r+d)^2 = 4(r^2 - e^2) - (r^2 - d^2),$$

rendezve

(4) $$r^2 - dr - 2e^2 = 0,$$

és innen

(5) $$r_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2}.$$

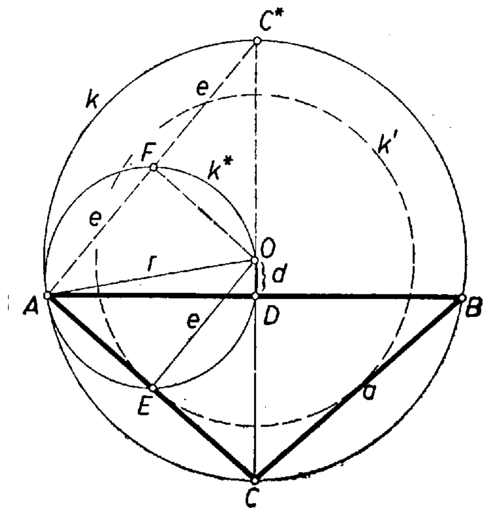
Mivel a diszkrimináns négyzetgyökének abszolút értéke nagyobb $d$-nél, és így

(6) $$r_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2}$$

negatív, azért csak a pozitív $r_1$-et tekintjük megoldásnak. $r_1$ alapján (1) és (2)-ből

(7) $$c = \sqrt{8e^2 + 2d\sqrt{d^2 - 8e^2} - 2d^2}, \quad a = \sqrt{4e^2 + 2d\sqrt{d^2 + 8e^2} + 2d^2},$$

természetesen csak a pozitív négyzetgyököt véve.




*2. ábra*

Ha azt tesszük fel, hogy $O$ a háromszögön kívül van (2. ábra) – vagyis, hogy az $ACB$ szög tompaszög – és $k$ sugarát erre az esetre $r'$-vel jelöljük, akkor a háromszögnek a tengelybe eső magassága $r' - d$, ezért (3) így módosul:

$$(r' - d)^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2. \tag{3'}$$

(1) viszont nem változik meg. Célszerűbb azonban azt mondanunk, hogy $d$ helyére (3)-ban és (1)-ben egyaránt $-d$ lépett. Így újabb számítás nélkül a mondott változtatással átvehetjük a fenti eredményeket:

$$r'^2 + dr' - 2e^2 = 0, \tag{4'}$$

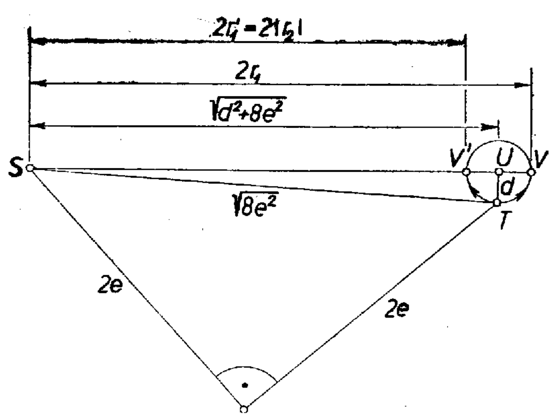
$$r_1' = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2} \quad \text{és} \tag{5'}$$

$$r_2' = \frac{-d - \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2} \tag{6'}$$

Itt csak $r_1'$ pozitív, ezzel $c$ és $a$-ra azokat a kifejezéseket kapjuk, amelyek (7)-ből $d$-nek $-d$-vel való helyettesítésével állnak elő.

Lehetséges volna az is, hogy $O$ a háromszög kerületén legyen, ti. ha $d = 0$. Ebből azonnal látható, hogy $ABC$ derékszögű egyenlő szárú háromszög és $a = 2e$, $c = 2\sqrt{2}e$, ami (7)-ből is kiadódik.

A háromszög megszerkesztése végett célszerű előbb a $k$ kört előállítanunk. Ugyanis a $k$-n tetszés szerint felvett $C$ csúcsból kiindulva úgy kapjuk meg a szárak egyeneseit, hogy $C$-ből érintőket húzunk az $O$ körül $e$ sugárral írt $k'$ körhöz; ezeknek $k$-val való második metszéspontja $A$, ill. $B$.




*3. ábra*

$k$ átmérőjét (5), ill. (5′) alapján a következő lépésekben szerkesztjük (3. ábra). $2e$ befogókkal egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk, ennek $ST$ átfogójára fennáll $ST^2 = 8e^2$. $ST$ és $d$ befogókkal derékszögű háromszöget szerkesztünk, ennek $SU$ átfogója egyenlő az (5) és (5′)-beli gyökös kifejezéssel. Az $SU$ egyenesre $U$-tól mindkét irányban felmérjük $d$-t, a végpontok $V$ és $V'$, az utóbbi $U$-tól $S$ felé. Ekkor $k$ átmérője az $SV$, ill. $SV'$ szakasz.

Ez a szerkesztés bármely $d$, $e$ mellett egyértelműen végrehajtható, a fent mondott érintők szerkesztése azonban csak akkor, ha $r$ nagyobbnak adódik $e$-nél. Ez (5) esetében nyilván teljesül, ($5'$)-re viszont csak akkor, ha

$$\begin{gathered}2r_1' = -d + \sqrt{d^2 + 8e^2} > 2e,\\ d^2 + 8e^2 > (d + 2e)^2 = d^2 + 4de + 4e^2,\\ 4e^2 > 4de, \quad e > d.\end{gathered}$$

Ez a követelmény a 2. ábráról is leolvasható az $O$, $D$, $E$ pontok helyzetéből. Eszerint $e > d$ esetén két megoldás van, $e \leq d$ esetén pedig egy.

*Katona Éva*(Budapest, Ybl M. ép. ip. t. II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Vegyük észre, hogy $r_2$, $r_2'$ abszolút értékben egyenlő $r_1'$-gyel, ill. $r_1$-gyel. Ez természetesen annak következménye, ahogyan ($4'$)-t képeztük. Mondhatjuk ugyanis azt is, hogy ($4'$) a (4)-ből úgy állt elő, hogy $r$ helyére $r' = -r$-et írtunk. Ez egyben azt is jelenti, hogy elég lett volna csak pl. (4)-et felírni és ezt mondani: $d$ azt jelenti, hogy mennyivel van $O$ az $AB$ oldal „fölött", $r$ pedig azt, hogy mennyivel van följebb $C$, mint $O$. Negatív $r$ azt jelenti, hogy $C$ az $O$ alatt van (2. ábra).

2. Több dolgozatban (1) és (2) mellett az $ACD$ és $OCE$ háromszögek hasonlóságából adódó

$$\frac{c}{2} : a = e : r$$

aránypár szerepel harmadik egyenletként. Szerzőik így látszólag megkerülték az $O$ pont belső vagy külső helyzetének kérdését. Ebből az aránypár négyzetre emelésével és (1), (2) felhasználásával $r^2$-re kaptak másodfokú egyenletet:

$$\left(r^2 - d^2\right) : \left(4r^2 - 4e^2\right) = e^2 : r^2,$$

$$r^4 - \left(d^2 + 4e^2\right) r^2 + 4e^4 = 0. \tag{8}$$

Innen mind a számítás, mind a szerkesztés, mind a diszkusszió jóval bonyolultabb a fent közöltnél. Ennek az a magyarázata, hogy (8) bal oldalában (4) és ($4'$) bal oldalának szorzata áll előttünk, ugyanis

$$r^4 - 4e^2r^2 + 4e^4 - d^2r^2 = \left(r^2 - 2e^2\right)^2 - d^2r^2 = \left(r^2 - 2e^2 - dr\right)\left(r^2 - 2e^2 + dr\right).$$

(8)-ból $r^2$-re két pozitív gyököt kapunk, mert mind a diszkrimináns:

$$\left(d^2 + 4e^2\right)^2 - 16e^4 = d^2\left(d^2 + 8e^2\right),$$

mind a gyökök szorzata: $4e^4$, mind összegük: $d^2 + 4e^2$ pozitív. Ezekből négyzetgyökvonás útján kapjuk azt a két egyenlő abszolút értékű, ellentett előjelű gyökpárt, amelynek elemei fent külön választva adódtak.

**II. megoldás:** Legyen – az I. megoldás jelöléseivel – a $k$ körön a $C$-vel átellenes pont $C^*$, és $O$ vetülete $AC^*$-on $F$ (1. és 2. ábra). Thalész tétele szerint $AC^* \perp AC$, így az $AEOF$ négyszög téglalap, köréje kör írható. E $k^*$ kör középpontja az $OA$ szakasz felezőpontja, ezért $k^*$ átmegy a $D$ talpponton is. Továbbá $F$ felezi $AC^*$-ot, így $C^*F = FA = OE = e$ és $C^*A = 2e$.

Alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzható szelők metszeteire vonatkozó tételt $k^*$-ra és $C^*$-ra

$$C^*O \cdot C^*D = C^*F \cdot C^*A,$$

vagyis az 1., ill. a 2. ábra eseteiben

$$r(r - d) = e \cdot 2e = 2e^2, \qquad \text{ill.} \qquad r(r + d) = 2e^2. \tag{9}$$

Ezzel megkaptuk az I. megoldás (4), ill. ($4'$) egyenletét. Tovább ismét az I. megoldás szerint haladhatunk.

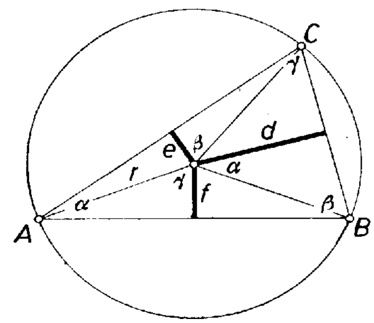
*Gálfi László* (Budapest, Fazekas M. gyak. gimn. II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. A 3. ábrát felére kicsinyítve (vagyis a befogókat $e$, $e$, majd $d/2$-nek véve) a szerkesztést úgyis értelmezhetjük, mint a (9) egyenlet szerkesztéssel való olyan megoldását, amely a legutóbb idézett tételt használja fel. A (9) bal oldalán álló tényezők különbsége ismert szakasz: $d$, az egyik tényező pedig éppen az ismeretlen. Ezért olyan kört veszünk, melynek átmérője $d$, egyik szelőként pedig majd a külső pontot a középponttal összekötő egyenest. A külső pont helyzetét a jobb oldal alapján tűzzük ki: úgy, hogy a belőle húzott érintő egyenlő legyen a jobb oldali tényezők mértani középarányosával.

*Klukovits Lajos* (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

2. Az 1. megjegyzés gondolatát folytatva $e < d$ esetén $r$ a következőképpen is szerkeszthető. Legyenek $L$, $M$, $N$ egy egyenes olyan pontjai, amelyekre $LM = MN = e$, az $MN$ alap fölé $d/2$ szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa $O$, és messe az $OL$ egyenest az $O$ körül $d/2$ sugárral írt kör $P$ és $P'$-ben. Ekkor $r$ értéke $LP$, ill. $LP'$.

3. Egy tetszés szerinti háromszög szögei legyenek $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, a körülírt kör $O$ középpontjának e szögekkel szemközti oldalaktól mért távolsága rendre $d$, $e$, $f$ (4. ábra).




*4. ábra*

A középponti és kerületi szögekre vonatkozó összefüggésekből következik, hogy az $O$-ból az oldalakra bocsátott merőlegesek az oldal végpontjaihoz húzott sugarakkal rendre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nagyságú szögeket zárnak be. Így

$$\cos\alpha = \frac{d}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{e}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{f}{r}.$$

Ez tompaszögű háromszögre is érvényes, ha abban az esetben, amikor az $O$ pont és a háromszög valamelyik oldalnak ellenkező oldalára esnek, akkor az oldaltól mért távolságot negatívnak vesszük. Másrészt az $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ összefüggés folytán

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= \cos^2\left[180^\circ - (\beta+\gamma)\right] = \left[-\cos(\beta+\gamma)\right]^2 = \\ &= \cos^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\beta\sin^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma = \\ &= \cos^2\beta\cos^2\gamma + \left(1-\cos^2\beta\right)\left(1-\cos^2\gamma\right) - 2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma = \\ &= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\beta\cos\gamma(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) = \\ &= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\beta\cos\gamma(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

Innen

$$1 - \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0,$$

és ha $\beta = \gamma$, akkor a bal oldal szorzattá alakítható:

$$1 - \cos^2\alpha - 2\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos^2\beta = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha - 2\cos^2\beta).$$

Valódi háromszög esetén $\alpha < 180^\circ$, s így $1+\cos\alpha \neq 0$, tehát egyenlő szárú háromszögben, ha $\alpha$ a szárak közti szög,

$$1 - \cos\alpha - 2\cos^2\beta = 0.$$

Beírva a koszinuszok kifejezését $d$, $e$, $f$, $r$ segítségével és a törteket eltávolítva tetszés szerinti háromszögre

$$r^3 - \left(d^2+e^2+f^2\right)r - 2def = 0,$$

egyenlő szárú háromszögre pedig

$$r^2 - dr - 2e^2 = 0$$

kell, hogy teljesüljön. Az utóbbi a fenti megoldásokban is szereplő egyenlet, az előbbi alapján pedig belátható, hogy általános háromszög esetén a kitűzött feladat megfelelője általában nem oldható meg a szokásos ún. eukleidészi körző-vonalzós szerkesztések segítségével.[1]

A körzővel és vonalzóval végrehajtható szerkesztésekre vonatkozóan lásd lapunk egy korábbi cikkét: *Surányi János: A szögharmadolás kérdéséről*, Középisk. Matematikai Lapok XIV. (1957), 97–107. és 129–134. o.

[1]Lásd *Szőkefalvi Nagy Gyula:* Zwei nichtkonstruierbare Aufgaben des Dreiecks. Elemente der Mathematik, 6 (1951), 81–83. o.