Legyen egy kisebb csavar átlagos tömege x, egy nagyobbé pedig y gramm. Ekkor a

$$\text{(I)} \qquad 3x+2y=319$$
$$\text{(II)} \qquad 2x+3y=351$$

egyenletrendszerből

$$\text{(1)} \qquad x=\frac{3\cdot 319-2\cdot 351}{3\cdot 3-2\cdot 2}=51(=x_0), \qquad y=\frac{3\cdot 351-2\cdot 319}{3\cdot 3-2\cdot 2}=83(=y_0).$$

Tekintve a mérleggel elérhető pontosságot, a két mérési eredmény mértékszáma helyén minden olyan d, ill. e számot figyelembe kell vennünk, amelyre

$$\text{(2)} \qquad 318{,}5\leqq d\leqq 319{,}5 \qquad \text{ill.} \qquad 350{,}5\leqq e\leqq 351{,}5,$$

mert mérlegünk minden ilyen d, e mértékszámú tömeget 319, ill. 351 grammnak mutat.

Az (I) és (II) helyett így adódó

$$3x+2y=d, \qquad 2x+3y=e$$

rendszerből

$$\text{(3)} \qquad x=\frac{3d-2e}{5}, \qquad y=\frac{3e-2d}{5}.$$

Jellemezzük (1) eredményeink pontosságát azzal a legnagyobb eltéréssel, ami (1) és (3) között létrejön, miközben d és e minden lehetséges értékpáron átfut. A 617. gyakorlatbeliekhez hasonló meggondolásokkal x számlálója úgy lesz legnagyobb, ha d legnagyobb és e legkisebb értékét vesszük:

$$x\leqq\frac{3\cdot 319{,}5-2\cdot 350{,}5}{5}=51{,}5, \quad \text{vagyis} \quad x_{\max}-x_0=0{,}5 \text{ gramm.}$$

A hasonlóan képezett

$$x_{\min}=\frac{3\cdot 318{,}5-2\cdot 351{,}5}{5}=50{,}5,$$

$$y_{\max}=\frac{3\cdot 351{,}5-2\cdot 318{,}5}{5}=83{,}5, \qquad y_{\min}=\frac{3\cdot 350{,}5-2\cdot 319{,}5}{5}=82{,}5$$

értékekkel a legnagyobb $|x-x_0|$ és $|y-y_0|$ eltérés minden esetben 0,5 grammnak adódik. Azt mondhatjuk, az (1) eredmények pontossága annyi, mint az egyes méréseké, tehát annyi, mintha 1 kis és 1 nagy csavart külön-külön mértünk volna meg.

Görbe Tamás (Budapest, Bem J. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az eltérések a következő alakban is vizsgálhatók:

$$x-x_0=\frac{3(d-319)-2(e-351)}{5}, \qquad y-y_0=\frac{3(e-351)-2(d-319)}{5}.$$

2. A megoldás végső megállapítása meglepő, mert természetesnek tartjuk, hogy több egyforma tárgy egyszerre való mérésével a pontosságot növelhetjük, más szóval a lehetséges hiba felső korlátját kisebbnek kapjuk. Valóban, ha 5 kis csavart 255, majd 5 nagyobb csavart 415 grammnak mértünk volna, ebből x_0 és y_0 fenti értékét 0,1 grammnyi pontossággal kaptuk volna. – A vélt ellentmondás annak meggondolásával oszlik el, hogy egyetlen mérés eredménye vagy felfelé tér el a mérni kívánt valódi értéktől, vagy lefelé; a feladatban viszont x_0, y_0 számítását a két egymástól független mérési leolvasásból kétszeres hibalehetőség terheli. A két eltérés irányára is 4 különböző pár veendő tekintetbe: fel-fel, fel-le, le-fel, le-le. Láttuk, hogy két ellentett jelű eltérés egymás hatását erősíti; viszont két egyirányú eltérés kevésbé torzítja az eredményt, pl. $d=319{,}4$ és $e=351{,}3$-ból $x=51{,}12$ és $y=81{,}02$.

3. Az eredmények pontossága minden olyan esetben az egyes mérések pontosságával egyenlő, ha a feltett kis csavarok száma az egyik mérésben 1-gyel több, a másikban 1-gyel kevesebb a nagy csavarok számánál. Ugyanis a

$$kx+(k-1)y=d, \qquad (k-1)x+ky=e$$

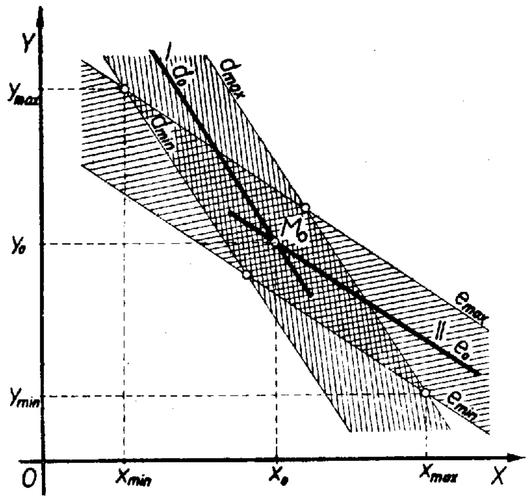
egyenletrendszerből, ahol k a kis csavarok száma,

$$x=\frac{kd-(k-1)e}{2k-1}, \qquad y=\frac{ke-(k-1)d}{2k-1},$$

és itt pl. x számlálójában d legnagyobb értékével $0{,}5k$ és e legkisebb értékével $0{,}5(k-1)$ növekedés állhat be, összesen $0{,}5(2k-1)$, tehát x legnagyobb lehetséges növekedése 0,5 gramm.

Mezei Mihály (Budapest, I. István g. II. o. t.)

4. A 617. gyakorlat II. megoldásához hasonló grafikus megoldásban az I és II egyenleteknek megfelelő sávok az M metszéspont helyéül paralelogrammát határoznak meg. Mindkét sáv egyenesei balról jobbra süllyednek, mert pl. I-ben x-et növelve y csökken; továbbá d, ill. e növelésével távolodnak a tengelyek metszéspontjától. Ebből látható, hogy $x_{\min}$ és $y_{\max}$ a $d_{\min}$ és $e_{\max}$-ból adódnak, $x_{\max}$ és $y_{\min}$ pedig $d_{\max}$ és $e_{\min}$-ből.



5. A szemlélet szerint valószínű – bizonyítása azonban messze vezetne –, hogy ha x és y együtthatóinak aránya az I- és II-beli 3/2 és 2/3 helyett az 1-től jobban eltérő érték, akkor az ábrázoló egyenesek az egyik tengelyhez kisebb szöggel hajlanak, továbbá a sávok keskenyebbek, és ezért a paralelogramma „hosszú” átlója rövidebb, és a tengelyeken való vetületei is rövidebbek, x és y pontatlansága kisebb.