I. Megoldás: Az egyenlet gyöke a tizedes számokat egyelőre pontosaknak tekintve a szokásos számító megoldással, 3 tizedesre felkerekítve:

$$x=\frac{12+5{,}03\cdot 1{,}75}{8-3\cdot 1{,}75}\approx 7{,}565.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a tizedes szám adatok kerekítéssel jöttek létre, akkor helyettük minden olyan szám szóba jön, amely két tizedesre kerekítve ezeket adja, vagyis minden olyan b és c, amelyre

$$5{,}025\leqq b\leqq 5{,}035,\qquad \text{ill.}\qquad 1{,}745\leqq c\leqq 1{,}755. \tag{1}$$

Ekkor a gyök:

$$x=\frac{12+bc}{8-3c}.$$

Ugyanakkora pozitív nevezőjű törtek közül a legnagyobb számlálójú a legnagyobb, és a legkisebb számlálójú a legkisebb. Ugyanakkora számlálójú törtek közül – ha, mint esetünkben is, a számláló is és minden szóba jövő nevező is pozitív – a legkisebb nevezőjű a legnagyobb, és a legnagyobb nevezőjű a legkisebb. Esetünkben mind a számláló, mind a nevező változó, ezért x lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét az idézett kiválasztási szempontok egyidejű figyelembevételével kell megállapítanunk. c-t növelve x számlálója növekszik, mert b pozitív, nevezője csökken, így maga x növekszik. És nyilván akkor éri el legnagyobb értékét, ha c is és b is a legnagyobb értékét veszi fel. Eszerint

$$x_{\max}=\frac{12+5{,}035\cdot 1{,}755}{8-3\cdot 1{,}755}\approx 7{,}618,$$

3 tizedesre lekerekítve.

Hasonlóan c-t csökkentve a számláló csökken (mert b pozitív) és a nevező növekszik, így maga x csökken, és akkor adódik a legkisebb értéke, ha c és b mindegyikét legkisebbnek vesszük:

$$x_{\min}=\frac{12+5{,}025\cdot 1{,}745}{8-3\cdot 1{,}745}\approx 7{,}512,$$

3 tizedesre *fel*kerekítve. (A kerekítési szabály szerint e hányadost önálló számként lefelé kellene kerekítenünk, de a korlátokat inkább szűkebben adjuk meg, vagyis az alsó korlátot magasabban.) Eszerint

$$7{,}512\leqq x\leqq 7{,}618.$$

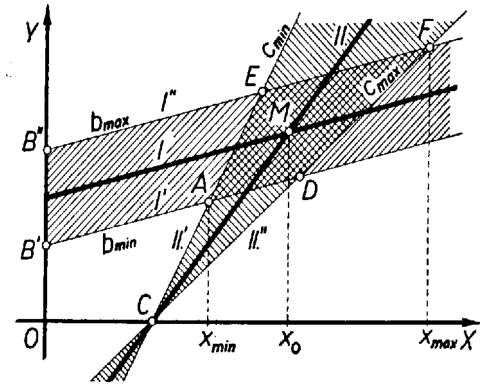
Nagy Dénes Lajos (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

Megjegyzések. I. Amikor $x_{\max}$ közölt értékét lefelé, $x_{\min}$-ét pedig felfelé kerekítettük, egyszersmind némileg eleget tettünk a kerekítési szabályhoz „a szokásjog alapján" hozzátapadt következő függeléknek is: ha a kerekítendő szám véges tizedes tört, utolsó jegye 5 (vagy egész szám, és utolsó a 0-tól különböző jegye 5), és ezt az egyetlen jegyet kell elhagynunk, – akkor azt a kerekítési irányt választjuk, amellyel az előtte álló, utolsó megmaradó jegy páros lesz. Ugyanis ehhez a megállapodáshoz csatlakozva (1)-ben mind a négy $\leqq$ jel helyén $<$ írandó, és ezért x még kevésbé érheti el a 7,619 és 7,511 értékeket, mintha (1)-ben fennállhatna a $\leqq$ jel. – Rámutatunk azonban, hogy maga a kerekítési szabály egy *elvet* valósít meg, azt, hogy a kerekített értéknek a valódi értéktől való eltérése legkisebb legyen; az említett függelékben pedig arra a ritka kivételes „döntetlen" esetre szóló *megállapodás* (szokás) van kimondva, ha a valódi érték a belőle le- és felfelé való kerekítéssel adódó számoktól ugyanannyival tér el. A számolással foglalkozó emberek ugyanolyan „joggal" a páratlan jegyre kerekítésben is megállapodhattak volna az elv szerint eldönthetetlen esetekre.

2. Sok dolgozaton látszik szerzőjük hiányos elképzelése a „hosszú", de mégis véges és a végtelen tizedes törtekről. Pl.: „5,03 csak a következő számokból jöhetett létre: 5,025, 5,026, ..., 5,033, 5,034." Eszerint a megtartott utolsó jegy után csak egyetlen jegyről lehetett szó. Vagy: „5,03 legkisebb értéke 5,025, legnagyobb értéke 5,0349." Ez a megoldó két jegy elhagyására is gondol, de fogalmazása szerint 5,034 901-et már 5,04-re kerekítené, sőt a még kisebb 5,034 900 01 végtelen, szakaszos tizedes törtet is. – *A kerekítési szabállyal két tizedesre* 5,03-*at adó számok között* – ha 5,025-öt és 5,035-öt a fentiek szerint kizártuk – *nincs sem legkisebb, sem legnagyobb!* Vagyis lehet mondani bármely állítólag legkisebb ilyen számnál kisebbet, amely még mindig nagyobb 5,025-nél, és bármely állítólag legnagyobb ilyen számnál nagyobbat is, amely még mindig kisebb 5,035-nél, – sőt evégett sohasem kell végtelen tizedes törtet keresnünk, mindig van a mondott tulajdonsággal bíró szám az „elég hosszú" véges tizedes törtek között is.

3. Másrészt ismét rámutatunk arra, hogy „legalább" és „legfeljebb" szavainkat számosan az általános használattal ellentétesen értelmezik, és ez az ország különböző tájain egyaránt felbukkan. Egy miskolci dolgozat szerint „x legalább 8,59 és legfeljebb 7,34", egy budapesti szerint „legalább 7,673 és legfeljebb 7,458". Lerögzítjük, hogy a „legalább 7,512, legfeljebb 7,618" állításon azt értjük, hogy a kérdéses szám nem lehet kisebb 7,512-nél és nem lehet nagyobb 7,618-nál. Ez az értelmezés – bár nyilván nem függnek össze – megfelel a koordinátarendszer Y-tengelye szokásos, felfelé való irányításának: a kérdéses számnak mint függvénynek *legalsó* megengedett értéke 7,512, a *legfelső* pedig 7,618. (Más kérdés, hogy e tény kifejezésére a „leg" mellőzésével elég *alsót, felsőt* mondani, amint – matematikai szempontból - a „legelső", „legutolsó" szavak sem szabatosak. Hasonló matematikai szakkifejezések az *alsó*, ill. *felső korlát*, az *alsó*, ill. *felső* határ is.)

II. megoldás: A fellépő tizedes számokat pontosaknak tekintve az egyenletet grafikusan úgy oldjuk meg, hogy ábrázoljuk a két oldalon álló elsőfokú függvényeket és leolvassuk grafikonjuk, az I, ill. II egyenesek M metszéspontjának abszcisszáját.



A kerekítettség figyelembevételével viszont mindkét oldalon egyetlen egyenes helyett végtelen sok egyenesre kell gondolnunk. Az egyenletet

$$\frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = \frac{2}{c}(x - 1{,}5) \tag{3}$$

alakban írva látjuk, hogy a bal oldalnak megfelelő egyenesek párhuzamosak (irányuk állandó), de az x-től nem függő $b/4$ tagnak megfelelően az Y-tengelyt más-más pontban metszik, azokban, amelyekre (1)-ből:

$$5{,}025/4 = 1{,}25625 \leqq b/4 \leqq 1{,}25875 = 5{,}035/4.$$

Vagyis b lehetséges értékein végigmenve a megfelelő egyenes eltolódik. – Eszerint ha megrajzoljuk az Y-tengely 1,25625 és 1,25875 ordinátájú B', B'' pontján át az I-gyel párhuzamos I$'$, I$''$ egyeneseket, akkor bármely x-hez (3) bal oldalának legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét úgy kapjuk, hogy leolvassuk I$'$-n, ill. I$''$-n az x abszcisszához tartozó pont ordinátáját. Vagyis I helyére az I$'$ és I$''$ közti sáv lép.

A (3) jobb oldalát ábrázoló egyenes bármely c mellett átmegy az X tengely 1,5 abszcisszájú C pontján, mert $x = 1{,}5$-höz a függvényérték mindig 0. Viszont a különböző $2/c$ meredekség-értékeknek megfelelően az egyenesek iránya más és más, az egyenes a C pont körül kissé elfordul. c legkisebb értékéhez tartozik a legnagyobb $2/c$ meredekség (II$'$), c legnagyobb értékéhez a legkisebb (II$''$). Így II helyére a II$''$ és II$'$ közti (kisebb) szögtartomány lép.

Nyilvánvaló most már, hogy I és II-nek M metszéspontja helyére az $ADFE$ négyszög pontjai lépnek, és abszcisszájuk a balszélső A és jobbszélső F csúcs abszcisszája közé esik. Látjuk, hogy A a legkisebb b és a legkisebb c értékhez tartozó I$'$ és II$'$ metszéspontja, F-et pedig a legnagyobb b és legnagyobb c-vel adódó I$''$ és II$''$-ből kapjuk. (Az ábra természetesen torzított, de az emelkedési viszonyokat minőség szempontjából helyesen mutatja; ezeken múlik ugyanis, hogy az $ADFE$ négyszög melyik csúcsa a bal-, ill. jobbszélső.)