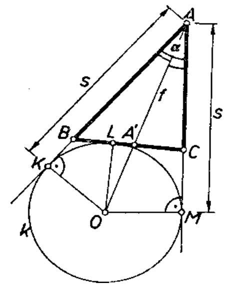
I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak és a nyert ABC háromszög BAC szöge, AA' szögfelezője és kerülete legyen egyenlő rendre az adott α szöggel, ill. az f, $2s$ szakasszal. Rajzoljuk meg a háromszög oldalegyeneseinek azt a k érintő körét (1. ábra), amely a BC oldalt kívülről érinti, és legyen ennek középpontja O, érintési pontja az AB, BC, CA oldalon rendre K, L, M (közülük L a BC szakaszon, K és M az oldalak B-n, C-n túli meghosszabbításán).



1. ábra

Ekkor O az AA' egyenesen van, a B-ből, C-ből, majd A-ból húzott érintőszakaszok egyenlők: $BK = BL$, $CL = CM$, $AM = AK$, és így $AK = (AK + MA)/2 = (AB + BK + MC + CA)/2 = (AB + BL + LC + CA)/2 = s$.

Ezek alapján a szerkesztés a következő: az α szög száraira felmérjük az $AK = AM = s$ szakaszt, a K és M-ben a szárakra emelt merőlegesek O metszéspontja körül OK sugárral megszerkesztjük k-t, az AO-félegyenesre felmérjük $AA' = f$-et és a nyert A'-ből k-hoz húzott érintővel a száraiból kimetsszük B, C-t.

A kapott ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert $BAC\sphericalangle = \alpha$, AA' felezi e szöget és A'-ben lép ki a BC oldalon, és $AB + BC + CA = AB + +BL + LC + CA = (AB + BK) + (MC + CA) = 2s$.

A megoldások száma 2, 1, 0 aszerint, hogy A' a k-hoz képest külső, ill. kerületi, ill. belső pont (vagy $f > OA$), és így az A'-ből 2. 1, ill. 0 (az A-t és O-t szétválasztó) érintőt lehet húzni. Ha 2 megoldás adódik, ezek AO-ra tükrösek, ha pedig 1 adódik, akkor a háromszög egyenlő szárú.

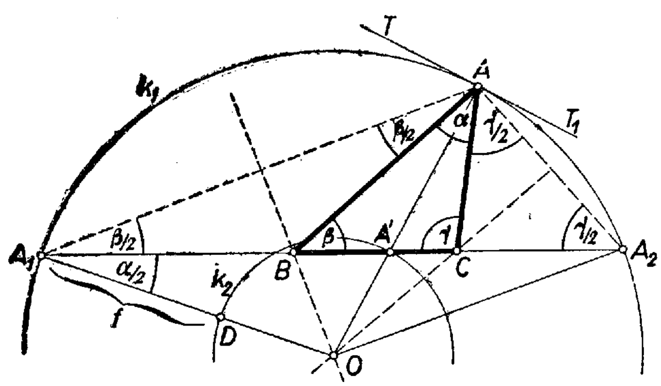
Opálény Mihály (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

Megjegyzés. Trigonometriai ismeretekre támaszkodva a megoldhatóság $AA' \leq AO - OK$ feltételét így is írhatjuk:

$$f \leq \frac{s}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Kender Etelka (Tata, Eötvös J. g. II. o. t.)

II. megoldás: Legyen az A csúcs tükörképe a háromszög B-nél, C-nél levő külső szögének felezőjére A_1, ill. A_2 (2. ábra).



2. ábra

Így az ABA_1 és ACA_2 háromszögek egyenlő szárúak, A-nál levő szögük a külső szög tétele szerint fele az $ABC = \beta$, ill. $ACB = \gamma$ szögnek, ugyanis A_1, A_2 a BC oldal meghosszabbításaira esnek, tehát

$$A_1AA_2\sphericalangle = \frac{\beta}{2} + \alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Továbbá

$$A_1A_2 = A_1B + BC + CA_2 = AB + BC + CA = 2s.$$

A használt tükrös tengelyek metszéspontját O-val jelölve $OA_1 = OA_2 = OA$, tehát O az AA_1A_2 háromszög k_1 körülírt körének középpontja. Másrészt szerkesztésénél fogva O az ABC háromszög oldalait érintő körök közül a BC oldalt kívülről érintő körnek középpontja, tehát OA felezi a $BAC = \alpha$ szöget, ezért $OA_1B\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \alpha/2$.

Ezek alapján az OA_1A_2 egyenlő szárú háromszög a $2s$ alapból és a rajta fekvő $\alpha/2$ (hegyes) szögből megszerkeszthető és folytatólag megrajzolhatjuk k_1-et. Másrészt OA_1-re A_1-től $A_1D = AA' = f$-et felmérve az OD szakaszban megkapjuk $OA - AA' = OA'$-t, és az O körül OD sugárral írt k_2 körrel A_1A_2-ből kimetszhetjük A'-t. Ezután az OA' félegyenessel k_1-ből kimetsszük A-t, végül AA_1 és AA_2 felező merőlegesével A_1A_2-ből kimetsszük B-t, C-t.

A megoldhatóság feltétele, hogy $OD = OA_1 - f$ nagyobb legyen O-nak A_1A_2-től való távolságánál.

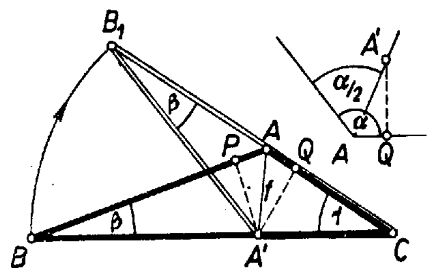
Fajszi Csaba (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Ha A_1, A_2-t A-nak B, ill. C körül BC meghosszabbításaira való ráforgatásával állítottuk elő, k_1-et pedig az AA_1A_2 háromszög körülírt körének tekintjük, akkor a következő meggondolással láthatjuk be, hogy AO felezi a $BAC = \alpha$ szöget. Húzzuk meg k_1-nek A-beli TT_1 érintőjét. Ekkor a kerületi szögek tétele szerint $TAA_1\sphericalangle = AA_2A_1\sphericalangle = \gamma/2$, tehát

$$OAB\sphericalangle = OAT\sphericalangle - TAA_1\sphericalangle - A_1AB\sphericalangle = 90^\circ - \gamma/2 - \beta/2 = \alpha/2.$$

Kerényi Ilona (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás: Legyen A' vetülete az AB, AC egyenesre P, Q, és forgassuk el az $A'BP$ derékszögű háromszöget A' körül úgy, hogy P csúcsa Q-ba essék, legyen B új helyzete a CA félegyenesen B_1 (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az $A'B_1C$ háromszög hasonló ABC-hez (körüljárásuk ellentétes irányú), mert C szögük közös, B, ill. B_1-nél levő szögük egyenlő. Így $A'CB_1$-ből ismerjük A'-nél levő szögét, $A'Q$ magasságát (megkaphatjuk egy az $AA'Q$ derékszögű háromszöggel egybevágó háromszögből, melyben az átfogó f és egyik hegyes szög $\alpha/2$), végül a kerületét. Ugyanis

$$\begin{aligned} CA' + A'B_1 + B_1C &= CA' + A'B + B_1Q + QC = CB + BP + QC = \\ &= CB + (BA - PA) + (AC - AQ) = 2s - 2AQ, \end{aligned}$$

ahol AQ a fenti derékszögű háromszög másik befogója. ($+QC$ helyett $-QC$ áll, ha $\gamma > 90^\circ$, de a végeredmény ugyanaz.) Ennélfogva az $A'B_1C$ háromszög megszerkeszthető.

Ha ugyanis A'-t B_1 és C körül B_1C meghosszabbításaiba forgatjuk és új helyzetei A_1', A_2', akkor $A_1'A_2' = 2s - 2AQ$ és $A_1'A'A_2'\sphericalangle = 90^\circ + \alpha/2$, tehát A' mértani helye egyrészt a látószögkörív, másrészt az $A_1'A_2'$-től $A'Q$ távolságban haladó párhuzamos. (Az ábra hasonlóságokat mutat a 2. ábrához, ezért mellőzzük.)

$A'B_1C$-ből az $A'B_1Q$ háromszög A' körüli „visszaforgatásával” kaphatjuk B és P-t (B a CA' félegyenesen, A'-n túl) és BP kimetszi CB_1-ből A-t.

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. II. o. t.)