I. Vegyünk fel egy derékszöget, rajzoljuk meg a szárait érintő, 50 mm sugarú kört, ennek azt az érintőjét, amely a szárakhoz 45° szöggel hajlik és amelynek a kör ugyanazon oldalán van, mint a derékszög csúcsa. Körünk a létrejött derékszögű egyenlő szárú háromszögnek beírt köre, kerülete $k = 100\pi \approx \approx 314$ mm. A háromszög oldalait 0,5 mm pontossággal 170,5, 170,5 és 241,5 mm-nek találjuk, így kerülete $k_1 = 582{,}5$ mm, nem éri el $2k$-t. (k_1 indexében – és később a szögekében is – a próbálkozás sorszámára utalunk.)

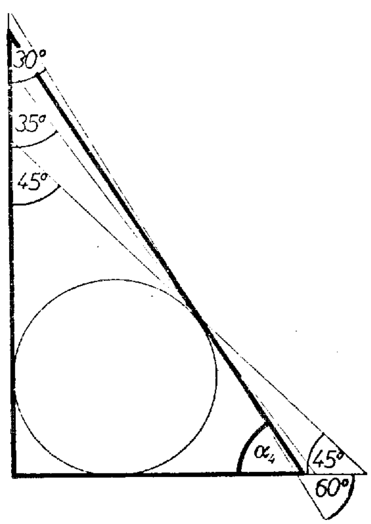
Tartsuk állandónak a derékszöget és a kört, és próbálkozzunk más érintőkkel. Ezek helyzetét az előálló derékszögű háromszög nagyobb α hegyes szögével adjuk meg. Legyen $\alpha_2 = 60°$, így a kerület: $k_2 \approx 136{,}5 + 236{,}5 + 273{,}0 = 646{,}0$ mm, nagyobb $2k$-nál.

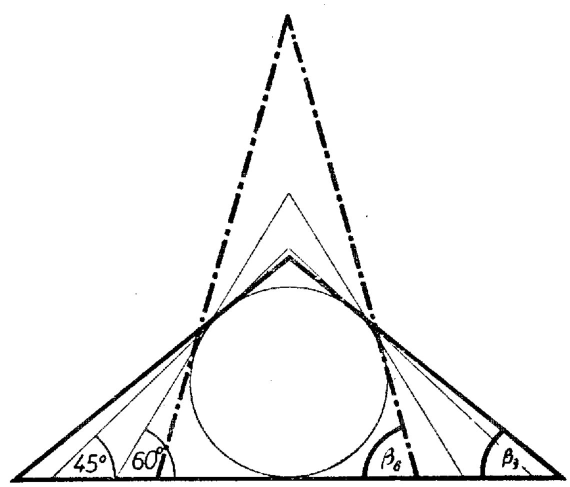
Fogadjuk el bizonyítás nélkül hogy α növelésével a fentihez hasonlóan szerkesztett derékszögű háromszög kerülete egyre nagyobbnak adódik. Ez valószínű, ugyanis így csak a kisebb befogó válik kisebbé, és ez is mindig nagyobb marad a kör átmérőjénél, a nagyobb befogó viszont akármilyen naggyá lehet, az átfogó pedig még ennél is nagyobb. Eszerint 45°-ról 60°-ra áttérve már túlmentünk a kívánt tulajdonságú a szögön. – k_1 hiánya $2k$-hoz képest $628{,}0 - 582{,}5 = 45{,}5$ mm, k_2 többlete pedig $646{,}0 - 628{,}0 = 18{,}0$ mm, kisebb a hiánynál. Ez arra mutat, hogy α-t 60°-hoz közelebb keressük.

$\alpha_3 \approx 55°$-kal $k_3 \approx 146{,}0 + 208{,}5 + 254{,}5 = 609{,}0$ mm, hiánya $2k$-hoz képest 19,0 mm. k_2 és k_3 alapján úgy látszik, hogy 57°, vagy 58° lesz a keresett szög.

$\alpha_4 \approx 58°$-kal $k_4 \approx 140{,}0 + 224{,}5 + 264{,}5 = 629{,}0$ mm, $\alpha_5 \approx 57°$-kal pedig $k_5 \approx 142{,}0 + 219{,}0 + 261{,}0 = 622{,}0$ mm, ezek közrefogják $2k$-t, a $k_4 - 2k$ eltérés 1,0 mm, a $2k - k_5$ eltérés pedig 6,0 mm.

Ezek szerint a kívánt tulajdonságú derékszögű háromszög hegyes szögei 58° és 32°.





II. Az előírt tulajdonságú egyenlő szárú háromszöget keresve tartsuk ismét állandónak az alap egyenesét, és a beírt kört. Így a háromszögek tengelye is állandó, és elég a szár és az alap fele hosszát mérnünk, ennek k-val kell egyenlőnek lennie. A szár irányát az alappal bezárt β szögével adjuk meg, a megvizsgált háromszögek ezen szögét és félkerületét rendre $\beta_1, \beta_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots$-vel jelöljük.

Induljunk ki a szabályos háromszögből, tehát legyen $\beta_1 \approx 60°$, így $s_1 \approx \approx 173{,}0 + 86{,}5 = 219{,}5$ mm, kisebb k-nál. Hallottuk, hogy az ugyanakkora kerületű háromszögekbe írt körök közül a szabályos háromszögbe írt kör sugara a legnagyobb; valószínű ebből, hogy fordítva ugyanazon kör köré írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb. Eszerint β növelésével és csökkentésével egyaránt várható a háromszög kerületének növekedése, mert a nagyon „magas” és nagyon „lapos” háromszögek kerülete egyaránt nagyobb a szabályos háromszögénél. Mindkét irányban csak egy-egy megoldás várható.

$\beta_2 \approx 45°$ esetére előbbi vizsgálatunkból $s_2 = k_1/2 \approx 291{,}0$ mm, ez valóban nagyobb s_1-nél, de még kisebb k-nál. $\beta_3 \approx 40°$ mellett $s_3 \approx 179{,}5 + 137{,}0 = 316{,}5$ mm, ez már kissé sok, $\beta_4 \approx 41°$ mellett viszont $s_4 \approx 177{,}0 + 133{,}5 = 310{,}5$ mm hiányt mutat, és a $k - s_4 \approx 3{,}5$ mm hiány nagyobb az $s_3 - k \approx 2{,}5$ mm többletnél. Így $\beta \approx 40°$-kal megfelelő háromszöget kaptunk, szögei 40°, 40°, 100°.

Másrészt $\beta_5 \approx 70°$-kal $s_5 \approx 209{,}0 + 71{,}5 = 280{,}5$ mm, ami kevés, a $k - s_1 \approx 94{,}5$ mm hiány $k - s_5 \approx 33{,}5$ mm-re, közel harmadára csökkent, ezért β-t az előbbi $\beta_5 - \beta_1 = 10°$-nál kevesebbel növeljük. $\beta_6 \approx 75°$-kal $s_6 \approx 251{,}5 + 65{,}0 = 316{,}5$ mm, kissé sok, de már $\beta_7 \approx 74°$-kal $s_7 \approx 240{,}5 + 66{,}5 = 307{,}0$ kevés. A k-tól való eltérés s_6-nál kisebb, így a második megfelelő háromszög szögei 75°, 75°, 30°.

Palánkai Gellért (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Kevesebb méréssel érünk célt az I. részben, ha figyelembe vesszük, hogy a háromszög kerülete a csúcsokból a körhöz húzott c_1, c_2, r érintő szakaszokkal is kifejezhető, és így a követelmény

$$2c_1 + 2c_2 + 2r = 2k,$$

ahol c_1 és c_2 a hegyes szögek, r pedig a derékszög csúcsából húzott érintőszakasz hossza. Innen

$$c_1 + c_2 = c = k - r,$$

esetünkben $c = 264{,}0$ mm, vagyis csak az átfogó hosszát kell mérnünk. A megoldásként elfogadott $\alpha_4 \approx 58^\circ$ mellett $c_4 = 264{,}5$-öt találtunk.

2. Ismeretes, hogy a háromszög területét a kerületnek és a beírt kör sugarának fél-szorzata is megadja, és hogy a körre nézve is $t = r^2\pi = 2r\pi\cdot \cdot r/2$. Eszerint mindegyik megoldásunkban a háromszög és a beírt kör területeinek aránya is 2-vel egyenlő. Valóban, körünk kétszeres területe közelítőleg $2\cdot 5^2\cdot 3{,}14 = 157\ \mathrm{cm}^2$, kapott derékszögű háromszögünk területe a befogókból $14{,}0\cdot 22{,}45/2 \approx 157{,}2\ \mathrm{cm}^2$. A talált egyenlő szárú háromszögeink területe pedig, – miután a magasságot 115,0, ill. 243,0 mm-nek mértük:

$$13{,}7\cdot 11{,}5 \approx 157{,}5\ \mathrm{cm}^2, \quad \text{ill.} \quad 6{,}5\cdot 24{,}3 \approx 157{,}9\ \mathrm{cm}^2.$$

3. Számos dolgozat – bár arról a feladatban szó sem volt – szerkesztést kívánt bevinni a megoldásba és ezért az 564. gyakorlatban adott módon szerkesztett egy a kör kerületével közelítőleg egyenlő szakaszt. Erre nem volt szükség; nem a kör kerületét kellett mérni, ennek eredményében semmi új nem várható, hanem a más-más szögek esetében adódó háromszögek kerületét mint a szögek függvényét. Már pedig ha szögmérőt használunk, eljárásunk nem tekinthető eukleidészi szerkesztésnek.

4. Trigonometriai ismeretek alapján a szögeket közelítőleg ki is lehet számítani.