I. megoldás: Próbáljuk meg a gyököket $t\sqrt{7}+u$ alakban előállítani, ahol t és u racionális számok. Más szóval: keressünk olyan racionális t, u és v, w számpárt, amellyel

$$(t\sqrt{7}+u)^5 = 409\sqrt{7}+1082, \qquad (v\sqrt{7}+w)^5 = 409\sqrt{7}-1082.$$

Az

(1)
$$a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = \\ = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

azonosság alapján

$$(t\sqrt{7}+u)^5 = 49t^5\sqrt{7}+245t^4u+70t^3u^2\sqrt{7}+70t^2u^3+5tu^4\sqrt{7}+u^5.$$

Feltevésünk szerint t, u hatványai is racionálisak, így a jobb oldalt irracionális és racionális részre szétválasztva

$$(t\sqrt{7}+u)^5 = (49t^5+70t^3u^2+5tu^4)\sqrt{7}+(245t^4u+70t^2u^3+u^5).$$

Így olyan t, u számpárt keresünk, amelyre áll

(2) $$(49t^4+70t^2u^2+5u^4)t = 409 \quad \text{és}$$

(3) $$(245t^4+70t^2u^2+u^4)u = 1082.$$

Innen látható, hogy t, u csak pozitívok lehetnek, mert a zárójelbeli háromtagúak mindenképpen pozitívok.

Ha t, u-ra van egész megoldás, akkor (2) szerint t páratlan, mert osztója a páratlan 409 számnak. Páratlan (2) háromtagúja is; és mivel első tagja páratlan, második tagja páros, azért harmadik tagjának, $5u^4$-nek is párosnak kell lennie, így u páros. Viszont (3) szerint u nem lehet osztható 4-gyel, mert 1082 sem osztható 4-gyel. Hasonlóan sem t, sem u nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel. Így a „kicsi” egész számok közül csak a $t=1$, $u=2$ párral próbálkozhatunk.

Ez (2) és (3) mindegyikét kielégíti, tehát

$$(\sqrt{7}+2)^5 = 409\sqrt{7}+1082.$$

Fordítva, mivel a páratlan kitevőjű gyökvonás (a valós számok körében) egyértelmű, azért $\sqrt{7}+2$ az egyetlen olyan szám, melynek 5-ik hatványa a jobb oldali szám, tehát

$$\sqrt[5]{409\sqrt{7}+1082} = \sqrt{7}+2.$$

A második tag hasonló meghatározása csak abban tér el a fentitől, hogy a (3)-nak megfelelő egyenlet jobb oldalán -1082 áll. Eszerint itt $v=t=1$, és $u=2$ helyére $w=-2$ lép:

$$\sqrt[5]{409\sqrt{7}-1082} = \sqrt{7}-2.$$

Ezek után a bizonyítandó állítás helyessége nyilvánvaló.

Megjegyzés. t, u helyén más egész számmal azért sem próbálkozhatunk, mert (a táblázat szerint) 409 és 541 mindegyike törzsszám.

II. megoldás: Vegyük észre, hogy az adott különbség két tagjának szorzata

$$\sqrt[5]{(409\sqrt{7}+1082)(409\sqrt{7}-1082)} = \sqrt[5]{7\cdot 409^2-1082^2} = \sqrt[5]{243} = 3.$$

Eszerint ha a bizonyítandó állítás helyes, akkor a két gyökkifejezést x és y-nal jelölve fennáll a következő két egyenlőség:

(4) $$x-y=4, \qquad xy=3.$$

Tekintsük (4)-et egyenletrendszernek és számítsuk ki valamennyi olyan x, y számpárt, amelyre (4) teljesül. Ha ezek között fellép az adott különbség két tagjából alakított pár, akkor (4) első egyenlete szerint az állítás helyes. Már most (4)-ből x kiküszöbölésével

$$y^2+4y-3=0, \quad \text{innen} \quad y_1=-2-\sqrt{7}, \quad y_2=-2+\sqrt{7},$$

és így

$$x_1 = 2-\sqrt{7}, \qquad x_2 = 2+\sqrt{7}.$$

Az x_1, y_1 értékpár nyilván nem azonos az állításbeli gyökökkel, hiszen x_1 negatív, az első gyök pedig pozitív. Az x_2, y_2 értékpár viszont – mint az I. megoldásban láttuk, megfelelő.

Nagy Géza (Debrecen, Ref. Kollégium gimnáziuma, II. o. t)

III. megoldás: $x-y=d$ ötödik hatványát kifejezhetjük d alacsonyabb hatványaival és az xy szorzattal. Ugyanis az (1) azonosság szerint

$$d^5=(x-y)^5=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5=$$
$$=(x^5-y^5)-5xy(x^3-y^3)+10x^2y^2(x-y),$$

és mivel

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)[(x-y)^2+3xy],$$

azért

$$(x-y)^5=(x^5-y^5)-5xy(x-y)^3-5x^2y^2(x-y). \tag{5}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy esetünkben a II. megoldás szerint $xy=3$ és

$$x^5-y^5=(409\sqrt{7}+1082)-(409\sqrt{7}-1082)=2164,$$

evvel (5)-ből egyenletet kapunk $x-y=d$-re. Azt 0-ra redukálva

$$d^5+15d^3+45d-2164=0.$$

Ezt a $d=4$ érték kielégíti: $1024+960+180-2164=0$, és ez az egyetlen pozitív gyöke. Valóban a bal oldal maradék nélkül osztható $(d-4)$-gyel:

$$d^5+15d^3+45d-2164=(d-4)(d^4+4d^3+31d^2+124d+541).$$

Eszerint a szorzat második tényezője minden pozitív d-re pozitív, az első tényező pedig minden 4-nél kisebb pozitív d-re negatív, minden 4-nél nagyobb d-re pozitív, tehát a szorzat sohasem 0.

Már pedig a bizonyítandó egyenlőség bal oldala pozitív szám. Ugyanis az első gyök alatti szám nagyobb a második gyök alattinál, így ez áll 5-ik gyökeikre is. Valóban (5) szerint

$$x^5-y^5=(x-y)[(x-y)^4+5xy(x-y)^2+5x^2y^2],$$

itt a szögletes zárójel értéke pozitív, hiszen $xy=3>0$, ezért x^5-y^5 és $x-y$ egyenlő jelűek. – Így $d=4$, az állítás helyes.

Haupert János (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. II. o. t.)