Ha x helyére 10-et, a, b, c, d, e helyére pedig számjegyeket írunk (vagyis a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8,\ 9$ számokat), akkor az azonosság bal oldalán a tízes számrendszer legfeljebb 5 jeggyel írható $a\cdot 10^4+b\cdot 10^3+c\cdot 10^2+d\cdot 10+e=\overline{abcde}$ számát kapjuk. Másrészt így $11=x+1$, és ez a jobb oldal első négy tagjának osztója, mert

$$\begin{aligned}&x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=[(x^2+1)(x-1)](x+1),\\&x^3+1=(x^2-x+1)(x+1),\\&x^2-1=(x-1)(x+1).\end{aligned}$$

Ezért az A, B, $C,\ldots$ betűkkel alkalmas egész számokat jelölve

$$10^4=11A+1,\quad 10^3=11B-1,\quad 10^2=11C+1,$$

továbbá

$$10=11D-1\quad \text{és}\quad 1=11E+1,$$

tehát

$$\begin{aligned}\overline{abcde}&=11(Aa+Bb+Cc+Dd)+(a-b+c-d+e)\\&=11F+[(e+c+a)-(d+b)]=11F+r.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overline{abcde}$ és r számok 11-gyel való osztásánál ugyanaz a maradék lép fel, hacsak r nem negatív; más szóval: $\overline{abcde}-r$ osztható 11-gyel. Pl. 62 738 és $r=(8+7+6)-(3+2)=16$ osztásánál a maradék egyformán 5, mert $62\,738=5703\cdot 11+5$ és $16=1\cdot 11+5$. Ha az osztásból csak a maradékra van szükségünk, azt így jóval egyszerűbben megállapíthatjuk.

Ha r negatív, akkor helyette

$$\overline{abcde}=11(F-2)+(r+22)$$

alapján a fenti állítást a $r+22$ számról mondhatjuk ki, ez pedig pozitív. (Esetleg már $r+11$ sem negatív.) Pl. 29 180-nak „11-es maradéka” 8, mert $29\,180==2652\cdot 11+8$ és az $r=(0+1+2)-(8+9)=-14$ helyett vett szám ugyancsak: $r+22=8$.

Az eljárás 5-nél kevesebb jegyű számokra is alkalmazható, pl. az első példában kapott „16” számra $a=b=c=0$ és $r=6-1=5$.

Az eljárást ki lehet terjeszteni akárhány jegyű számokra. Mert a két egyenlő páratlan kitevős hatvány összegének, valamint a két egyenlő kitevős hatvány különbségének szorzattá alakításáról ismert azonosságok szerint

$$x^{2k+1}+1=(x^{2k}-x^{2k-1}+x^{2k-2}-\ldots-x+1)(x+1)$$

és

$$\begin{aligned}x^{2k}-1=(x^2)^k-1&=[(x^2)^{k-1}+(x^2)^{k-2}+\ldots+x^2+1](x^2-1)=\\&=[(x^{2k-2}+x^{2k-4}+\ldots+x^2+1)(x-1)](x+1).\end{aligned}$$

Itt $x=10$-et írva látjuk, hogy

$$10^{2k+1}=11G-1, \tag{1}$$

és

$$10^{2k}=11H+1, \tag{2}$$

vagyis 10-nek minden (pozitív) páratlan kitevős hatványa 1-gyel kisebb, és minden (pozitív) páros kitevős hatványa 1-gyel nagyobb egy 11-gyel osztható számnál. Ebből az adott azonosság mintájára könnyű belátni, hogy minden n pozitív egész szám írható egy 11-gyel osztható pozitív szám és egy az n számjegyeiből egyszerűen képezhető r szám összegeként: $n=11J+r$. Az r maradékot két összeg különbségeként írhatjuk. A kisebbítendő tagjai az n-ben jobbról számítva páratlan sorszámú helyeken álló számjegyek, vagyis amelyeknek helyi értéke 10-nek páros kitevős hatványa (lásd a (2) alakot), – a kivonandó tagjai pedig n további, a páros sorszámú helyeken álló számjegyei, vagyis a 10^{2k+1} helyi értékűek (lásd az (1) alakot).

Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív egész szám 11-es maradéka ugyanaz, mint az r szám 11-es maradéka, ha r nem negatív. Ha pedig r negatív, akkor r helyett bármely $r'=r+11K$ alakú pozitív szám vehető.

A számok 11-es maradéka felhasználásával a „9-es próba” mintájára megadhatjuk a kívánt feltételeket és azokat együttesen „11-es próbának” nevezhetjük. A sokak előtt ismeretes, de többnyire hiányosan megfogalmazott 9-es próba a következőket mondja ki.

α) Egy szám 9-cel való osztásánál fellépő maradék – röviden: a szám 9-es maradéka – egyenlő a szám számjegyei összegének 9-es maradékával. Ennek esetleg ismételt alkalmazásával rövid úton megkaphatjuk az adott szám 9-cel való osztásában fellépő *legkisebb nem-negatív* 9-es maradékát, pl. 878 kilences maradéka annyi, mint $8+7+8=23$-é, ezé pedig annyi mint $2+3=5$-é, vagyis 5; valóban, $878=97\cdot 9+5$; szorosabb értelemben ezt szokás nevezni 9-es maradéknak.

β) Ahhoz, hogy adott számok összegére közölt szám helyes legyen, szükséges, hogy az „összeg” 9-es maradéka egyenlő legyen az összeadandók 9-es maradékaiból képezett összeg 9-es maradékával. (Vagyis ha a kívánt megegyezés nem teljesül, akkor az összegként közölt szám hibás, vagy pedig a „könnyebb” számításokban van hiba). A maradékok megegyezése viszont természetesen nem biztosítja a közölt eredmény helyességét, hiszen pl. egy számban két jegyet felcserélve általában más számot kapunk, de maradéka ugyanaz, – vagyis e feltétel szükséges, de nem elegendő.

γ) Hasonló a különbség és a szorzat helyességének feltétele. Nem lehet helyes a különbség, ha 9-es maradéka nem egyezik a tagjai 9-es maradékából (ugyanazon sorrendben) képezett különbséggel (ill. – ha ez negatívnak adódnék, a 9-cel nagyobb számmal). Nem lehet helyes a szorzat, ha 9-es maradéka nem egyezik a tényezői 9-es maradékából képezett szorzat 9-es maradékával.

δ) Mivel az osztást (teljes pontossággal) szorzással és összeadással ellenőrizzük: a q hányadost és r maradékot adó $a:b$ osztás akkor és csak akkor helyes, ha $qb+r=a$, azért a hányados és a maradék egyidejű helyességéhez szükséges, hogy a q és b 9-es maradékainak szorzatából és r-ből képezett összeg 9-es maradéka egyenlő legyen a 9-es maradékával.

ε) A 9-es próba az alapműveletek eredményének csupán számjegyeivel, vagyis „alaki értékekkel” foglalkozik, azért tizedes törtekkel végzett alapműveletek eredményének ellenőrzésére is használható.

E feltételek bizonyítására arra hivatkozunk, hogy ha az n szám 9-es maradéka r, akkor $n-r$ osztható 9-cel: $n-r=9A$. Már pedig 9-cel osztható számok összege, különbsége, ugyancsak osztható 9-cel:

$$(n_1-r_1)+(n_2-r_2)+\ldots+(n_k-r_k)=9(A_1+A_2+\ldots+A_k),$$

tehát valóban

$$(n_1+n_2+\ldots+n_k)-(r_1+r_2+\ldots+r_k)=9B;$$

és hasonlóan

$$(n_1-r_1)-(n_2-r_2)=(n_1-n_2)-(r_1-r_2)=9(A_1-A_2)=9C.$$

Szorzásnál az $n=9A+r$ alakból kiindulva

$$n_1n_2=(9A_1+r_1)(9A_2+r_2)=9(A_1r_2+A_2r_1+9A_1A_2)+r_1r_2,$$

így ismét

$$n_1n_2-r_1r_2=9D,$$

és – a különbségre tett megállapítás megfordításával – ha egy különbség osztható 9-cel, akkor tagjainak 9-es maradéka egyenlő.

Nyilvánvaló, hogy amíg egész számokról van szó, a *β)–δ)* megállapítások változatlanul átvehetők a 11-es próba „használati utasításába”. A 11-es maradék megállapításában azonban a számjegyek helyi értéke is lényeges; pl. 420-nak és a belőle a tizedesvessző eltolásával adódott 42-nek 11-es maradékai különbözők: 2, ill. -2, azaz 9, azért tizedes jegyeket is tartalmazó számokkal végzett műveletek ellenőrzéséhez további meggondolás szükséges. A példát folytatva 4200, 42 000, 420 000, …11-es maradéka váltakozva 9, 2, 9, …-nek adódik. Kézenfekvő volna ennek alapján a 4,2, és 0,42 tizedes törtek 11-es maradékát is 2-nek, 9-nek venni, de a „szabályok” átírása hosszadalmas volna. Gyakorlatilag megfelelő, ha a műveletben megadott számokat $10^2=100$ olyan alkalmas hatványával szorozzuk, hogy egészek adódjanak és – osztásban – a hányados kiszámított része is egész legyen. Így ugyanis az osztási maradék is egész.

Megjegyzés. Tudatosítani kívánjuk olvasóinkban azt, hogy a fenti próbák alkalmazása minden esetre azt jelenti, hogy az alkalmazó még nem tekinti a szóban forgó műveletet befejezettnek. Ez a magyarázata annak, hogy egyesek „nem matematikai” szabálynak tekintik e próbákat. Valóban „a matematikában” a számítási eredményelv helyességét általában már feltételezik, ott már nem ez a kérdés; viszont eredménynek csak felelősséggel ellenőrzött adatot fogadunk el. Ámde az emberi élet semmiféle számszerű vonatkozása nem zárható ki a matematikából, vagyis a számítási folyamat kérdései sem. A fenti próbák sem a tapasztalatból adódtak, hanem az elmélet állapította meg azokat a gyakorlati számítás céljára.

Másrészt felhívjuk versenyzőinket, hogy minden számításukat valamilyen alkalmas módon ellenőrizzék. Sok elvben helyes dolgozatot a numerikus hibák rontanak el.