I. megoldás: Olyan a, b, c, d számjegyeket keresünk, vagyis 0 és 9 közti egész számokat, [1] e két határt is megengedve, amelyekre

$$\begin{gathered}1000a+100b+10c+d-(10a+b)(10c+d)= \\ =1000d+100c+10b+a-(10d+c)(10b+a).\end{gathered}$$

A két oldal felcserélhetőségére tekintettel előírhatjuk, hogy $a\leq d$ legyen, továbbá hogy $a=d$ esetén $b\leq c$ legyen. Így elébe vághatunk annak, hogy a megoldásokat kétszer kapjuk meg. Beszorzással, rendezéssel és osztással

$$111(a-d)+10(b-c)+11(bd-ac)=0. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy a bal oldali első két együttható egy-egy 11-gyel osztható szám szomszédja. Ennek alapján (1) így alakul:

$$11[10(a-d)+(b-c)+bd-ac]=(d-a)+(b-c), \tag{2}$$

vagyis a jobb oldal osztható 11-gyel.

A jobb oldalon $d-a$ nem lehet negatív, másrészt értéke legfeljebb 9 lehet:

$$0\leq d-a\leq 9.$$

Hasonlóan

$$-9\leq b-c\leq 9. \tag{3}$$

Ezekből összeadással (2) jobb oldalára a következő egyenlőtlenség adódik:

$$-9\leq (d-a)+(b-c)\leq 18,$$

mivel pedig ez osztható 11-gyel, azért értéke csak 0, vagy 11 lehet. Eszerint – mindjárt átrendezve –

$$\begin{aligned}&\text{vagy I.} \qquad c-b=d-a,\\ &\text{vagy II.} \qquad c-b=d-a-11.\end{aligned}$$

A $bd-ac=(d-a)b-(c-b)a$ azonosság alapján (2) úgy alakítható, hogy mindegyik tagjában szerepel vagy a $d-a$, vagy a $c-b$ különbség:

$$11[(b-10)(d-a)-(a+1)(c-b)]=(d-a)+(b-c).$$

Eszerint *az I. esetben,* 11-gyel mindjárt egyszerűsítve

$$[(b-10)-(a+1)](d-a)=(b-a-11)(d-a)=0,$$

ami csak $d-a=0$, azaz $d=a$-val állhat, mert a $b-a-11=0$ egyenlet, jelöléseink értelmét tekintve, nem teljesülhet. Így egyszersmind $c-b=0$, azaz $c=b$; arra a semmitmondó eredményre jutottunk, hogy követelményünket minden $\overline{abba}$ alakú szám kielégíti.

A *II. esetben* hasonlóan járva el azt nyerjük, hogy

$$(b-a-11)(d-a)+11(a+1)=1,$$

vagy mivel a feltevés folytán $b-a-11=c-d$, azért

$$(d-c)(d-a)=11a+10. \tag{4}$$

Eszerint a jobb oldal értéke legalább 10, azaz pozitív, tehát $d-a\geq 0$ folytán a bal oldal mindkét tényezője pozitív. Így a értéke legfeljebb 8, a jobb oldal értéke a

$$10,\quad 21,\quad 32,\quad 43,\quad 54,\quad 65,\quad 76,\quad 87$$

számok valamelyike, de csak olyan jöhet szóba, amely $d-c$ és $d-a$ céljára két 10-nél kisebb pozitív szám szorzatára bontható. Ezt 43, 65, 76 és 87 nem teljesítik. Nem felel meg $54=6\cdot 9$ sem, mert így $a=4$, és a $d-a=6$, vagy 9 követelésből $d\geq 10$, tehát nem lehet számjegy. Hasonlóan (4) jobb oldalát $32=4\cdot 8$-nak véve $a=2$, így csak $d=6$ felel meg, folytatólag azonban $c=-2$ adódik. Ugyanígy negatív c-t ad $21=3\cdot 7$ és $10=2\cdot 5$ kisebb tényezőjének $d-a$-val való azonosítása is, így csak a következő két lehetőségünk marad:

[1] Tovább „egész szám” helyett csak „szám”-ot mondunk.

1) ha $a=1$, (4) jobb oldala $21=3\cdot 7$, és itt $d-a=7$ és $d-c=3$-ból $d=8$, $c=5$, végül $b=9$, ezzel a példaként bemutatott 1958 számra jutottunk;

2) ha $a=0$, (4) jobb oldala $10=2\cdot 5$, és itt $d-a=5$, $d-c=2$-ből $d=5$, $c=3$, $b=9$. Így

$$0935-09\cdot 35=5390-53\cdot 90(=620),$$

de az előlálló és így a szokáshoz képest felesleges 0 miatt ez is csak elfajult megoldásnak tekinthető.

Tekulics Péter (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

II. megoldás: Az (1) összefüggés $b-c=x$, $bd-ac=y$, $d-a=e$ jelölésekkel így írható

$$10x+11y=111e. \tag{5}$$

Tekintsük itt x, y-t ismeretlennek, e számára pedig vegyük sorra figyelembe a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ értéket. x értéke csak (3)-nak eleget tevő szám lehet. Ezt a megszorítást egyelőre figyelmen kívül hagyva minden e mellett megoldása az egyenletnek $x_0=-e$, $y_0=11e$. Ha x, y egy másik egész megoldás, akkor

$$10x+11y=111e=11(11e)-10e.$$

Innen átrendezéssel

$$10(x+e)=11(11e-y). \tag{6}$$

A bal oldalt $11(x+e)-(x+e)$ alakban írva nyilván csak úgy lehet 11-gyel osztható, ha $x+e$ osztható 11-gyel: $x+e=11k$, vagyis $x=11k-e$. Ekkor (6)-ból $y=11e-10k$ adódik.

A (3) egyenlőtlenség x-re csak $k=0$-ra, továbbá $e\geq 2$ esetén a $k=1$ érték mellett teljesül.

Ha $k=0$, akkor $b-c=x=-e$-ből $b=c-e$ és $d-a=e$-ből $d=a+e$. Így $y=bd-ac=(c-a-e)e$. Ezt $y=11e$-vel egybevetve, ha $e\neq 0$, akkor a $c-a=11+e\geq 12$ összefüggésre jutunk, amit számjegyek nem elégítenek ki. Ha pedig $e=0$, akkor a $b=c$, $d=a$ feltételhez, tehát a nyilvánvalóan helyes $\overline{abba}$ alakú megoldásokhoz jutunk.

Ha $k=1$, akkor $x=-e+11$, $y=11e-10$. Az előzőkhöz hasonlóan $b=c-e+11$ és az $y=bd-ac=(c-e+11)(a+e)-ac=(c-a-e)e+11(a+e)=11e-10$ egybevetésből rendezés után

$$ec+(11-e)a=e^2-10. \tag{7}$$

Itt a bal oldal nem lehet negatív, tehát csak $e\geq 4$-gyel várhatunk megoldást. Ezeket táblázatban adjuk meg:

e	így (7) alakja	megoldás
4	$4c+7a=6$	nincs
5	$5c+6a=15$	$c=3,\quad a=0;\quad d=5,\quad b=9$
6	$6c+5a=26$	$c=1,\quad a=4;\quad d=10$-re vezet, nem megoldás
7	$7c+4a=39$	$c=5\quad a=1,\quad d=8,\quad b=9$ $c=1,\quad a=8;\quad d=15$-re vezet, nem megoldás
8	$8c+3a=54$	$c=6,\quad a=2;\quad d=10$-re vezet, nem megoldás

Eszerint $\overline{abcd}=0935$.

Megjegyzések. 1. A feladat kérdésére („Van-e...") elegendő egyetlen példa közlésével ezt a választ adni: „van, és pedig..., mert..." Ennek ellenére – igen helyesen – a legtöbb dolgozat hosszabb-rövidebb indokolás után ad választ. Adódott viszont olyan dolgozat, amely megindokolja, hogy „nincs az adotthoz hasonló tulajdonságú $\overline{abcd}$ szám."

2. Az (5)-höz hasonló, $ax+by=c$ alakú egyenletek egész megoldásaira vonatkozóan lásd lapunk régebbi cikkét: *Surányi János:* Elsőfokú egyenletek egész megoldása (Diofantoszi egyenletek), K. M. L. VII. kötet (1953) 65–81. o.