Előzetes megjegyzés: Csak konvex érintőnégyszögekkel foglalkozunk.

I. megoldás: Minden (konvex) deltoid (és természetesen speciális esetei, rombusz és négyzet is) érintőnégyszög, és átlói merőlegesek egymásra. Ennélfogva, ha az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalainak hossza rendre a, b, c, d, akkor a követelmények teljesüléséhez ***elegendő*** feltétel a következő: $a = b$, $c = d$, vagyis hogy az oldalak közül 2–2 szomszédos pár egyenlő legyen. Megmutatjuk, hogy e feltétel ***szükséges*** is, ugyanis az ezzel ellentétes állítás ellentmondásra vezet.

Ha egy érintőnégyszög egy pár szomszédos oldala egyenlő, pl. $a = b$, akkor az ismert szükséges és elegendő

(1) $$a + c = b + d$$

feltételből $c = d$ következik, vagyis hogy a további két oldal is egyenlő. Ezért fenti állításunk ellentéte az, hogy van olyan $ABCD$ érintőnégyszög, amelyben bármelyik két szomszédos oldal különböző és az átlók merőlegesek. Válasszuk a betűzést úgy, hogy $a < b$ és $a < d$ legyen. Ekkor B-nek az AC átlóra való B' tükörképe az MD szakaszra esik, ahol M az átlók metszéspontja, mert $MB = \sqrt{AB^2 - MA^2} < \sqrt{AD^2 - MA^2} = MD$. Hasonlóan A-nak BD-re való A' tükörképe MC-nek belső pontja, így $CB'M\sphericalangle > A'B'M\sphericalangle = AB'M\sphericalangle$, és ezért $CB'D\sphericalangle < AB'D\sphericalangle$. Mérjük rá az $AB = AB'$ szakaszt B'-től $B'C$-re és legyen végpontja E. Így az $EB'D$ és $AB'D$ háromszögek két-két oldala egyenlő, ezek közbezárt szöge az előbbiben kisebb, ezért a vele szemben levő oldal is kisebb: $DE < DA = d$. Másrészt $CE = CB' - B'E = b - a$, tehát a CDE háromszögben

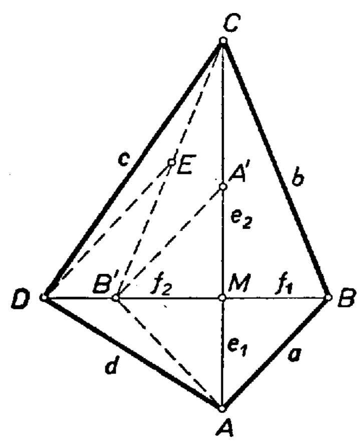
$$CD < CE + DE < CE + DA,$$

vagyis $c < b - a + d$, amiből $a + c < b + d$.

Ez pedig valóban ellentétben áll (1)-gyel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Valamennyi dolgozat számítás útján adta meg a keresett feltételt. Ilyen megoldás a következő.

II. megoldás: Legyenek a fenti jelölésekkel az átlók metszetei $MA = e_1$, $MC = e_2$, $MB = f_1$, $MD = f_2$.



Az átlók merőlegessége folytán

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2, \quad b^2 = f_1^2 + e_2^2, \quad c^2 = e_2^2 + f_2^2, \quad d^2 = f_2^2 + e_1^2,$$

és ebből

(2) $$a^2 - d^2 = f_1^2 - f_2^2 = b^2 - c^2$$

Másrészt (1)-ből

(3) $$a - d = b - c.$$

(2) és (3) teljesülnek egyrészt, ha mindkét oldaluk 0, vagyis $a = d$ és $b = c$. Másrészt, ha (3) egyik oldala sem 0, akkor a (2) átalakításával adódó

$$(a - d)(a + d) = (b - c)(b + c)$$

egyenlőségnek (3)-mal való osztásából

(4) $$a + d = b + c,$$

ez pedig (3)-mal összeadva $a = b$, továbbá $d = c$-re vezet. Mindkét lehetőségben a négyszög 2–2 szomszédos oldala egyenlő. Ez velejáró következménye – szükséges feltétele annak, hogy az érintőnégyszög átlói merőlegesek legyenek. Ekkor a négyszög deltoid.

E feltétel elegendő is, mert pl. $a=b$ és $c=d$ folytán $a+c=b+d$, és így a deltoid érintőnégyszög, másrészt ismeretes, hogy átlói merőlegesek.

Dringó László (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2) egyenlőségből így is haladhatunk tovább. Átrendezéssel

$$a^2+c^2=b^2+d^2. \tag{5}$$

Ezt (1) négyzetéből levonva

$$(a+c)^2-(a^2+c^2)=(b+d)^2-(b^2+d^2),$$

vagyis

$$2ac=2bd. \tag{6}$$

És ezt (5)-ből levonva, átalakítással

$$(a-c)^2=(b-d)^2$$

és mivel a betűzés megváltoztatásával mindig elérhetjük, hogy $a\geq c$ és $b\geq d$, azért

$$a-c=b-d,$$

ami azonos (4)-gyel. Így (1), (4) és (6) szerint merőleges átlópárral bíró érintőnégyszögben a szemben fekvő oldalpárok összege is, különbsége is és szorzata is egyenlő.

2. Akik ismerik a hiperbolának ezt a meghatározását: azon pontok mértani helye, melyekre nézve a két adott ponttól (a fókuszoktól) mért távolságok különbsége adott állandó, és pedig kisebb az adott pontok távolságánál, – és szemléletes képük is van a hiperboláról, hogy ti. a fókuszokat összekötő egyenesre (a hiperbola egyik tengelyére), merőleges egyenesnek legfeljebb két közös pontjuk van a hiperbolával, éspedig ha kettő van, azok a tengelyre tükrös párt alkotnak, – azok a fenti deltoidfeltétel szükséges voltát *szemlélet alapján* a következőkből is beláthatják. Ha $ABCD$ érintőnégyszög, akkor (1)-ből $a-b=d-c=2e$, tehát B és D annak a hiperbolának pontjai, melynek fókuszai A és C, és állandó különbsége $2e$. Ha pedig $AC\perp BD$, akkor B és D az AC-re tükrös pontpár. – Ez a „belátás” azonban nem bizonyítás!