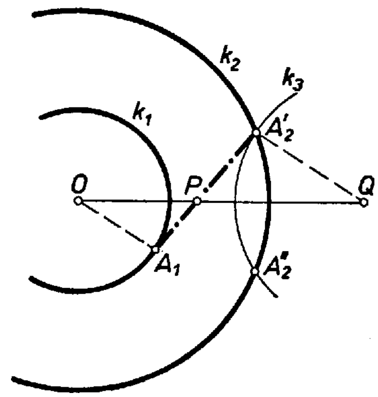
Legyen a gyűrűt határoló k_1, k_2 körök közös középpontja O, sugaruk hossza r_1, r_2, és az adott pont P (OP az r_1 és r_2 közti távolság). Az $m:n$ arányt úgy tekintjük adottnak, hogy adva vannak – pl. egy egyenesen a C kezdőpontból indulóan – a BC és CD) szakaszok, amelyekre $BC:CD=m:n$.

Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyenek a keresett húr végpontjai A_1, A_2, amelyekre $A_1P:PA_2=m:n$ (ill. az I. osztályosok speciális esetében $A_1P=PA_2$, ilyenkor $m:n=1$). Húzzunk A_2-n át párhuzamost OA_1-gyel és messe ezt az OP egyenes Q-ban.



Így a PA_1O és PA_2Q háromszögek hasonlók (a speciális esetben egybevágók), megfelelő oldalaik az adott arányban állnak, ezért $PQ=PO\cdot n/m$ és $QA_2=OA_1\cdot n/m$ (ill. $PQ=OP$ és $A_2Q=r_1$). Ezek alapján a szerkesztés a következő: megszerkesztjük PQ-t és QA_2-t (pl. a C-n átmenő c egyenesre C-től felmérjük OP-t, OA_1-et, a végpontjaikat B-vel összekötő egyenesekkel D-n átmenő párhuzamosokkal c-ből kimetsszük PQ, QA_2 egyik végpontját, másik végpontjuk C. PQ-t felmérjük OP-nek P-n túli meghosszabbítására, a kapott Q körül QA_2 sugárral írt k_3 körrel a k_2-ből kimetsszük A_2-t, végül az O-ból kiinduló, QA_2-vel párhuzamos és ellentétes irányú félegyenessel k_1-ből kimetsszük A_1-et.

Q szerkesztése mindig egyértelműen végrehajtható, k_3 és k_2 kölcsönös helyzete szerint 2, 1, vagy 0 megoldás van. Ha 2 megoldás van, akkor ezek az OP tengelyre tükrösek. Ha pedig k_3 és k_2 érintkeznek, a megoldások száma 1. Lehetséges, hogy az A_1A_2 húr egy szakasza a kisebb kör belsejébe esik.

Minthogy a feladat nem írja elő, hogy az A_1A_2 húr melyik részének arányszáma legyen m, ill. n, azért a szerkesztést m és n szerepének felcserélésével is el kell végeznünk. A második szerkesztés megoldásainak száma független az elsőétől. (A megcserélés a speciális esetben természetesen elmarad.)

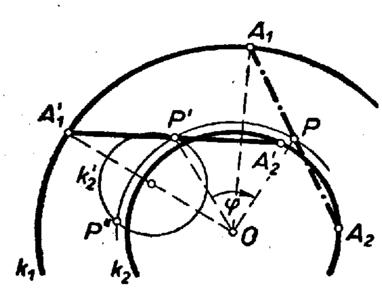
A szerkesztésben k_1 és k_2 szerepét természetesen felcserélhetjük.

Rajki Péter (Pécs, Nagy Lajos g. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Rövidebben azt is mondhatjuk, hogy k_3-at a k_1-ből $n:m$ arányú nyújtással és egyidejű P körüli $180°$-os elforgatással kaptuk. (A speciális esetben pedig k_1-nek P-re való tükrözésével; ekkor lényegében az OA_1A_2 háromszöget szerkesztjük meg r_1, r_2 oldalaiból és a közös O végpontjukból kiinduló OP súlyvonalából.)

Rédei György (Kecskemét, Piarista g. II. o. t.)

2. Nyújtás (zsugorítás) és forgatás kombinálásával a speciális esetben a következő két észrevétel alapján is célhoz érünk: *a)* Ha P-t, A_1-et és A_2-t O körül valamilyen φ szöggel elforgatjuk, új P', A_1', A_2', helyzetükben a P' pontra adnak a többi követelményeknek megfelelő megoldást. *b)* Az $A_1P=PA_2$-ből folyó $A_1A_2=2A_1P$ egyenlőséget úgy is értelmezhetjük, hogy P az A_2-ből az A_1 középpontú, felére való zsugorítással keletkezett.



Képezzük most már egy a k_1-en tetszés szerint vett A_1' körüli félszeres zsugorítással k_2-ből k_2'-t és messük k_2'-t az O körüli OP sugarú körrel, legyen az egyik metszéspont P'. Ekkor az $A_1'P'$ félegyenesnek az az A_2' pontja, amelyre $A_1'A_2'=2A_1'P'$, rajta van k_2-n, tehát az A_1', P', A_2' ponthármas P' helyzetétől eltekintve megfelel a követelményeknek. Ezért A_1' és A_2'-t O körül a $P'OP$ szöggel A_1, A_2-be elforgatva megoldást kapunk.

Az általános esetben $1:2$ arányú zsugorítás helyett $m:(m+n)$ arányút használunk. (Ha a megoldás helyes voltát beláttuk, akkor A_2' megszerkesztése mellőzhető, mert A_2-t P és A_1-ből is megkapjuk.)