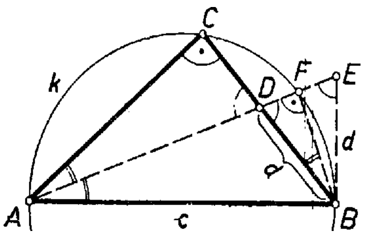
I. megoldás: Az állítás bizonyítására elég megmutatnunk, hogy a BDE háromszög két szöge, éspedig a D és E-nél levők, egyenlők. Valóban a csúcsszögek egyenlősége, az ACD és ABE háromszögek szögeinek összege, valamint a feltevések alapján

$$EDB\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 180^\circ - ACD\sphericalangle - CAD\sphericalangle = 180^\circ - ABE\sphericalangle - BAE\sphericalangle =$$
$$= BEA\sphericalangle = BED\sphericalangle.$$

A bebizonyított tétel szerint $BE = BD = d$. Ennek alapján c és d-ből megszerkesztjük az ABE derékszögű háromszöget, ennek AE átfogóján a B körül d sugárral írt körrel kimetsszük D-t, végül az AB átmérő fölötti k Thalész-kör és a BD egyenes második metszéspontjában megkapjuk C-t.



Az ABC háromszög megfelel a követelménynek, ugyanis derékszögű, és benne az $AE \equiv AD$ egyenes felezi a BAC szöget, mert
$$BAE\sphericalangle = 90^\circ - BED\sphericalangle = 90^\circ - BDE\sphericalangle = 90^\circ - CDA\sphericalangle = CAD\sphericalangle.$$
D akkor adódik az AE szakaszon, ha $d < c$. Ez a szerkeszthetőség egyetlen feltétele.

Porpáczy Erzsébet (Jászberény, lg. I. o. t.)

Megjegyzés: Az ABE háromszög megszerkesztése után C-t a k-ból az AB egyenesnek AE-re való tükörképével is kimetszhetjük. Ekkor $BAE\sphericalangle = EAC\sphericalangle$, és az ABC háromszög megfelelő voltának bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy teljesül a $BD = d$ követelmény, ami éppen a feladat állítása. A BAC szög akkor adódik hegyes szögnek, ha fele, a BAE szög kisebb 45°-nál, ennek feltétele, hogy $d < c$ legyen, mert így az ABE derékszögű háromszögben A-nál kisebb szög adódik, mint E-nél.

Kopcsányi Zsuzsa (Budapest, Berzsenyi D. lg. II. o. t.)

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy a BDE háromszögben a BF szögfelező (F az AD egyenesen) egyben magasság is; ebből már következik a bizonyítandó állítás. Valóban, a CBE és CAB szögek egyenlők, mert mindkettő pótszöge a CBA szögnek, így a felezésükkel kapott $CBF = DBF$ és CAD szögek is egyenlők. Egyenlők továbbá a BDF és ADC szögek is, mert csúcsszögek. Így a BFD és ACD háromszögek harmadik szögei is egyenlők: $BFD\sphericalangle = ACD\sphericalangle =$ derékszög, állításunknak megfelelően. Eszerint F rajta van k-n.

Fordítva: a B-ből az AD szögfelezőre bocsátott BF merőleges felezi a $DBE = CBE$ szöget, mert az egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője azonos az ugyanazon csúcsból húzott magassággal. De közvetlenül is belátható: így ugyanis F szerkesztésnél fogva k-n van és felezi a CB ívet: $\widehat{CF} = \widehat{FB}$, mert a BAF és CAF szögek egyenlők. Ezért az ezen íveken fekvő CBF és FBE kerületi szögek egyenlők.

Ennek alapján az I. megoldásbeli szerkesztés helyességét így igazolhatjuk. BE a k-nak érintője, ezért a $BAD = BAF$ szög (ahol most F az AE és k metszéspontja) egyenlő a BF íven fekvő FBE „húr-érintő” szöggel. Ez segédtételünk megfordítása szerint egyenlő az $FBD = FBC$ szöggel, az utóbbi pedig az ugyancsak az FC íven fekvő $FAC = DAC$ szöggel.

Kiss Tünde (Tamási, Béri Balogh Á. g. II. o. t.)

III. megoldás: Az állítást a szögfelező osztási arányáról ismert tételből kiindulva is bizonyíthatjuk. Eszerint

$$BD : CD = BA : CA.$$

Másrészt a felezés és a merőleges szerkesztés folytán a BEA és CDA derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$BE : CD = BA : CA.$$

E két aránypár második arányai azonosak, ezért az első arányok is egyenlők:

$$BD : CD = BE : CD.$$

Ha pedig két egyenlő értékű arány utótagjai egyenlők, akkor az előtagok is egyenlők: $BD = BE$.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)