**I. megoldás:** Az egyenlet gyökei

$$x_1=\frac{-\sqrt{17}+\sqrt{17+4\sqrt{18}}}{2\sqrt{3}},\qquad x_2=-\frac{\sqrt{17}+\sqrt{17+4\sqrt{18}}}{2\sqrt{3}}.$$

A feladat az $x_1$-hez, ill. $x_2$-höz legközelebb eső, 3 tizedesjegyet tartalmazó $x_1^*$, ill. $x_2^*$ szám megadását kívánja. Ezek legfeljebb 0,0005-del térhetnek el $x_1$-től, ill. $x_2$-től. Így a követelmény a következő két részre bontható: egyrészt $x_1^*$ és $x_2^*$ 3 tizedesjegyet tartalmaz, másrészt

$$x_1^*-0{,}0005\le x_1\le x_1^*+0{,}0005\quad\text{és}\quad x_2^*-0{,}0005\le x_2\le x_2^*+0{,}0005.$$

A gyökök meghatározására több olyan műveletet kell végezni, aminek az eredménye általában nem adható meg tizedesjegyekben pontosan: négyzetgyökvonásokat, osztást. Mivel közelítő értéket 1-nél nagyobb számmal szorozva a hiba is szorzódik, így célszerű a gyökmennyiségek 1-nél nagyobb szorzóját bevinni a gyökjel alá. Másrészt célszerű a nevezőt gyökteleníteni, hogy kevesebb helyen kelljen közelítő értéket használni. Így

$$x_1=\left(\sqrt{51+\sqrt{2592}}-\sqrt{51}\right)/6,\qquad x_2=-\left(\sqrt{51+\sqrt{2592}}+\sqrt{51}\right)/6.$$

Itt a 6-tal való osztás hatodára csökkenti a számlálóra kapott közelítő érték hibáját, viszont általában ez az osztás is csak közelítőleg végezhető el tizedestörtekkel. Belátható, hogy 1-nél nagyobb szám közelítő értékéből négyzetgyököt vonva – a gyök csökkenésével együtt – a hiba is csökken (viszont újabb hiba származhatik magából a négyzetgyökvonásból is).

Az osztás hibájára 0,0001-et hagyva, a számlálót elég $6\cdot 0{,}0004=0{,}0024$ hibával megközelíteni. Ebből hagyjunk 0,001-et a második négyzetgyök közelítésére, akkor az első, bonyolultabb kifejezésben nem hibázhatunk többet 0,0014-nél. A bizonyítás nélkül tett megjegyzés szerint, ha itt az első négyzetgyökvonást 0,001-nél nem nagyobb hibával végezzük, akkor a második négyzetgyökvonást elég pontosan végezve biztosan belül maradunk a 0,0014 hibakorláton.

(A megjegyzések során még visszatérünk a következő kérdésre: az eddigi előírásokkal csak annyit sikerül elérnünk, hogy a kiszámított közelítő értékek hibája 0,0005 alatt maradjon, nem föltétlenül biztos azonban, hogy az így meghatározott korlátok közé eső közelítő értékek közt előfordul olyan is, amelyik felírható 3 tizedesjegy segítségével.)

A műveleteket a fenti terv szerinti pontossággal elvégezve [1]

$$50{,}911\le\sqrt{2592}=50{,}912,$$
$$10{,}095\le\sqrt{101{,}911}\le\sqrt{51+\sqrt{2592}}\le\sqrt{101{,}912}\le 10{,}096,$$
$$7{,}141\le\sqrt{51}\le 7{,}142.$$

Így

$$0{,}4920<\frac{2{,}953}{6}=\frac{10{,}095-7{,}142}{6}\le x_1\le\frac{10{,}096-7{,}141}{6}=\frac{2{,}955}{6}=0{,}4925$$

és

$$-2{,}873=-\frac{17{,}238}{6}=-\frac{10{,}096+7{,}142}{6}\le x_2\le\frac{10{,}095+7{,}141}{6}=-\frac{17{,}236}{6}<-2{,}8726.$$

A feladatnak megfelelő közelítő érték gyanánt tehát

$$x_1^*=0{,}492\quad\text{és}\quad x_2^*=-2{,}873$$

adódott, és a számítás azt is mutatja, hogy mindkettő kisebb a keresett gyöknél.

**II. megoldás:** Az előző megoldásban a kétszeres négyzetgyökvonás okozta a fő bonyodalmat. Ezt esetleg el tudjuk kerülni, ha sikerül a gyök alatti kifejezést egy olyannal helyettesíteni, amiben már nem kell gyökmennyiségből gyököt vonni.

A gyökök, amelyeket racionális értékkel akarunk megközelíteni:

$$x_1=\frac{-\sqrt{17}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}},\qquad x_2=-\frac{\sqrt{17}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}.$$

Kíséreljük meg olyan pozitív racionális $t$ és $u$ szám keresését, amelyekkel fennáll

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{t}+\sqrt{u}.$$

[1] A következő egyenlőtlenségeket célszerű középtől kifelé olvasni, így jutunk az időben egymás után adódó számokhoz.

Innen

$$t+u=17, \quad \sqrt{tu}=6\sqrt{2}, \quad \text{azaz} \quad tu=72.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $t$, $u=9$, 8, racionális értékek, s így a

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=3+\sqrt{8}$$

összefüggést kaptuk. Ezt felhasználva az egyenlet gyökei – a számítások megkönnyítésére $\sqrt{3}$-mal bővítve és gyökmennyiségek szorzóit a gyökjel alá víve

$$x_1=\frac{1}{6}\left(\sqrt{27}+\sqrt{24}-\sqrt{51}\right), \qquad x_2=-\frac{1}{6}\left(\sqrt{27}+\sqrt{24}+\sqrt{51}\right).$$

Itt, mint könnyen látható, az egyes gyökvonásokat 0,001-nél nem nagyobb hibával végezve a végeredmény hibája 0,0005-nél nem lesz nagyobb. Mivel

$$5{,}196<\sqrt{27}<5{,}197, \qquad 4{,}898<\sqrt{24}<4{,}899, \qquad 7{,}141<\sqrt{51}<7{,}142,$$

azért ismét a fenti $x_1^*$, $x_2^*$ értékek adódnak.

*Kóta József* (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az első megoldásban utaltunk arra, hogy meggondolásaink nem biztosítják, hogy a közelítő értékekre adódó szakaszba essék 3 tizedes jegyet tartalmazó közelítő érték. Valóban, ha pl. $\sqrt{51}$ két 0,001-del kisebb érték közt volna, akkor $x_1$-re a $2{,}954/6 \le x_1 \le 2{,}956/6$ számköz adódnék, amelynek alsó határa 0,492 5 alatt van, felső határa fölötte, így számításaink nem döntenék el, hogy 0,492 vagy 0,493-e a keresett közelítő érték.

Azt nem is könnyű előre meghatározni, hogy hány tizedes jegyig kell számolni, hogy biztosan találjunk egy kellő számú tizedesjegyből álló közelítő értéket, hiszen ha esetünkben pl. $x_1$ nagyon kevéssel lenne 0,492 5 alatt, akkor annyi tizedesig kellene elvégezni a számítást, amíg már a fölső határ 0,492 5 alá kerülne. Ehhez azonban 3-nál sokkal több tizedesjegy ismerete is szükséges lehet, és annak megállapításához, hogy hány tizedes jegyig kell számolni, már $x_1$-nek egy jó közelítő értékét kellene ismerni.

2. Ugyancsak az I. megoldásban felmerült az a kérdés, hogy mit tudunk egy közelítő értékből négyzetgyökvonással nyert közelítő érték hibájáról. Legyen a gyökvonás alapja $a(>0)$, közelítő értéke $a'$, legyen $|a-a'|=h$ és $|\sqrt{a}-\sqrt{a'}|=k$. (A második négyzetgyökvonásból eredő hibát, amit tetszés szerinti kicsivé tehetünk, most figyelmen kívül hagyjuk.) Innen négyzetre emeléssel a $k^2=a+a'-2\sqrt{aa'}$ érték nem negatív. Ha $a'\ge a$, akkor $a=-a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ alapján

$$0\le k^2=a'-a+2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{a'}\right)=h-2\sqrt{a}\,k, \quad \text{tehát} \quad k\le\frac{h}{2\sqrt{a}};$$

ha pedig $a'<a$, akkor hasonlóan

$$0\le a-a'+2\sqrt{a'}\left(\sqrt{a'}-\sqrt{a}\right)=h-2\sqrt{a'}\,k, \quad \text{tehát} \quad k\le\frac{h}{2\sqrt{a'}}.$$

Ha $a''$ egy sem $a$-nál, sem $a'$-nél nem nagyobb érték, akkor $a'-a$ előjelétől függetlenül fennáll a $k\le h/\left(2\sqrt{a''}\right)$ becslés. A feladat esetében $a=51+ +\sqrt{2592}<101$, s így választhatunk $2\sqrt{a''}$ helyett 20-at, ami azt mondja, hogy a külső négyzetgyök 0,001 hibával történő kiszámításához elég lett volna a belsőt 0,02-nél nem nagyobb hibával határozni meg, tehát bőségesen elég lett volna 2 tizedes pontosságig számítani ki, amit az olvasó utólag könnyen ellenőrizhet.