Az értelmezés szerint az $a * b$ szám (bármely a, b számpárhoz) egyértelműen kiszámítható.

Az $a * x = c$ egyenlet a szokásos műveletek használatával így alakul

$$a+x+ax=c, \quad \text{azaz} \quad (a+1)x=c-a. \tag{1}$$

Innen

$$x=\frac{c-a}{a+1}, \tag{2}$$

kivéve, ha $a+1=0$. A kivett esetben $a=-1$, ekkor (1) nem oldható meg egyértelműen, ugyanis $c \neq a$ esetén nincs megoldás, $c=a=-1$ esetén pedig bármely x szám kielégíti (1)-et, ez esetben a $(-1) * x=-1$ egyenletet.

1. Az első bizonyítandó állítás az előbbi megoldás diszkussziójának speciális esete, ti. ha $c=0$. Ugyanis az $a * x=0$ egyenlet egyetlen megoldása (2) szerint

$$a'=\frac{-a}{a+1}, \quad \text{ha} \qquad a \neq -1; \tag{3}$$

$a=-1$ esetén viszont nincs megoldás, mert $c=0 \neq a$. Tehát valóban soha sincs egynél több az $a * a'=0$ egyenletet kielégítő szám.

2. Eszerint ha a' létezik, akkor a

$$(a')'=\frac{-a'}{a'+1}=\frac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{-a}{a+1}+1}=\frac{a}{-a+(a+1)}=a, \tag{4}$$

amit bizonyítanunk kellett.

3. Az

$$(a * b)'=a' * b' \tag{5}$$

egyenlőség igazolása végett a bal és a jobb oldalt külön-külön kifejezzük a és b-vel (feltéve persze, hogy léteznek). A bal oldal

$$(a * b)'=(a+b+ab)'=\frac{-(a+b+ab)}{a+b+ab+1}=\frac{-(a+b+ab)}{(a+1)(b+1)} \tag{6}$$

minden olyan esetben, ha a nevező nem 0, vagyis ha a is, b is $-$ 1-től különböző szám. – (5) jobb oldala pedig, hacsak $a \neq -1$ és $b \neq -1$;

$$\begin{aligned} a' * b' &= \frac{-a}{a+1} * \frac{-b}{b+1}=\frac{-a}{a+1}+\frac{-b}{b+1}+\frac{ab}{(a+1)(b+1)}= \\ &= \frac{-a(b+1)-b(a+1)+ab}{(a+1)(b+1)}=\frac{-a-b-ab}{(a+1)(b+1)}. \end{aligned}$$

Ez értékében is, létezésének feltételeiben is megegyezik (6) jobb oldalával, tehát az (5) egyenlőség valóban fennáll.

4. és 5. helyessége az eddigiekből következik. Ugyanis (5)-öt előbb a helyett a'-re, majd a és b helyett a' és b'-re felírva és mindkétszer (4) figyelembe vételével valóban fennállnak:

$$(a' * b)'=(a')' * b'=a * b',$$

illetőleg

$$(a' * b')'=(a')' * (b')'=a * b.$$

Az $y=x'=\dfrac{-x}{x+1}$ függvény képe az

$$y=\frac{-x-1+1}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1}, \quad \text{ill.} \quad y+1=\frac{1}{x+1}$$

átalakítás szerint az $y=1/x$ függvényt ábrázoló hiperbolából úgy kapható, hogy azt balra és lefelé egy-egy egységgel eltoljuk. Ahogyan az utóbbi függvénynek $x=0$ kivételével minden x-re van értelme, és értéke a 0-tól különböző szám, ugyanúgy az $y=x'$ függvénynek csak $x=-1$-re nincs értelme és értéke mindenütt -1-től különböző. A -1 szám semmilyen számnak sem vesszőse.

Kiss Gábor (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A csillag-műveletet értelmező egyenlőség mindkét oldalához 1-et adva

$$c+1=(a*b)+1=a+b+ab+1=(a+1)(b+1),$$

tehát az értelmezést így is írhatjuk

$$(a*b)+1=(a+1)(b+1) \quad \text{és} \quad a*b=(a+1)(b+1)-1.$$

(Az 1 szám hozzáadása előtt $a*b$-t félreértések elkerülésére zárójelbe tettük, mert előre nem adtunk megállapodást, hogy zárójel nélkül melyik művelet hajtandó végre előbb.) Ezek felhasználásával, ha már beláttuk, hogy az $a*x=c$, vagyis az $(a+1)(x+1)=c+1$ egyenletet legfeljebb egy szám elégíti ki, az $(a')'=a$ egyenlőséget így is bizonyíthatjuk. Az $a*a'=0$ egyenlet egyenértékű $(a+1)(a'+1)=1$-gyel, ami így is írható: $(a'+1)(a+1)=1$. Ugyanígy az $a'*(a')'=0$ egyenletből $(a'+1)\left[(a')'+1\right]=1$. A két utóbbi egyenlőség egybevetésével $a+1=(a')'+1$, és így $a=(a')'$.

Hasonlóan $a'+1=1/(a+1)$ alapján egyrészt

$$(a'*b')+1=(a'+1)(b'+1)=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{b+1}=\frac{1}{(a+1)(b+1)},$$

másrészt

$$(a*b)'+1=\frac{1}{(a*b)+1}=\frac{1}{(a+1)(b+1)}=(a'*b')+1,$$

tehát $(a*b)'=a'*b'$.

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. II. o. t.)