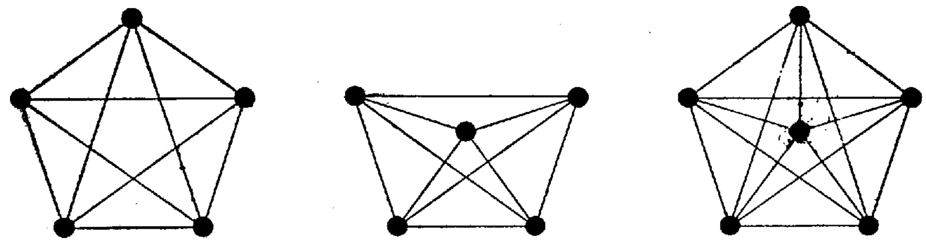
I. 1. A követelménynek megfelelő pontok együtteseit röviden pontrendszereknek, a háromszögekben a szárak közös végpontját főcsúcsnak fogjuk nevezni. Síkbeli, 5 pontból álló rendszer gyanánt megfelelnek (1. ábra):

a) egy szabályos ötszög csúcsai,

b) egy szabályos ötszög középpontja és négy csúcsa.



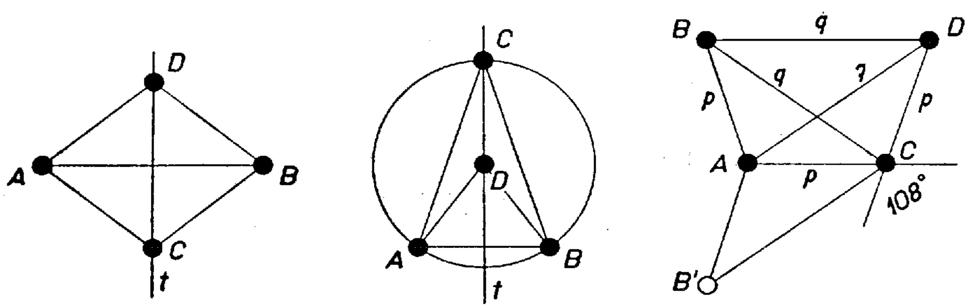
I. 1. a. I.1.b. I.2.

1. ábra

2. Síkbeli, 6 pontból álló rendszer: egy szabályos ötszög középpontja és valamennyi csúcsa.

A követelmény teljesülését elég a 2. rendszerre bizonyítani, mert az 1. *a)* és 1. *b)* rendszerek a 2.-ból egy-egy pont elhagyásával is kiadódnak. Az pedig nyilvánvaló, hogy ha egy pontrendszerre a követelmény teljesül, akkor a belőle egy vagy több pont elhagyása után visszamaradt pontok közül is – hacsak legalább 3 pont marad vissza – bármely 3 pont egyenlő szárú háromszöget alkot, hiszen a visszamaradó rendszer bármely három pontja beletartozik az eredeti rendszerbe. – Ha már most a 2. elhelyezésből kiválasztott három pont tartalmazza a középpontot, akkor a háromszög két oldala az ötszög k körülírt körének sugara, és így egyenlők. Ha pedig mindhárom pont ötszögcsúcs, akkor azok k kerületét úgy osztják három ívre, hogy ezek hosszúságainak aránya vagy $1:1:3$ – ha ti. az ötszög egymás utáni 3 csúcsát választjuk – vagy $1:2:2$ – ha ti. az előbbi ponthármas egyik szélső pontját az utána következő ötszögcsúccsal pótoljuk. Mindkét esetben van két egyenlő ív, ezért a megfelelő két húr is egyenlő, ezek a szárak.

3. Térbeli megoldások előkészítése céljára adunk néhány példát síkbeli, 4 pontból álló rendszerekre (2. ábra).



I. 3. a. I.3.b. I.3.c.

2. ábra

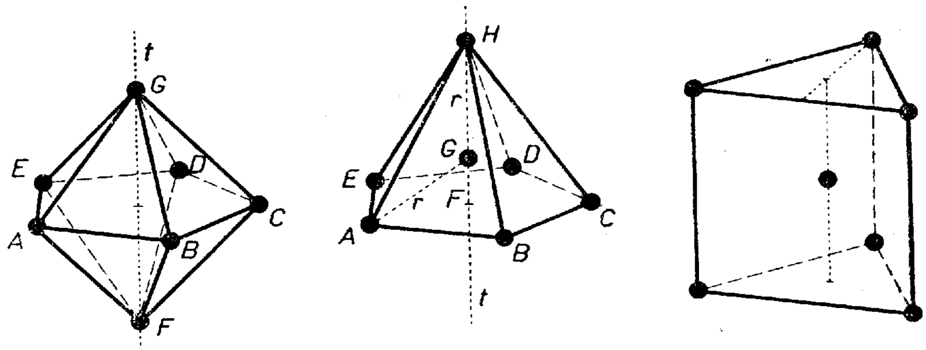
a) Egy tetszés szerinti rombusz 4 csúcsa; más szóval: az A és B pontokhoz hozzávesszük az AB szakasz felező merőlegesének egy tetszés szerinti (de a szakasz felezőpontjától különböző) D pontját és ennek AB-re való C tükörképét („tükrös pontpár”-lehetőség).

b) Egy olyan deltoid 4 csúcsa, melyben a szimmetriatengelybe eső átló egyenlő az egyik oldallal; más szóval: az előbbi A, B, D-hez t-nek azt a C pontját vesszük hozzá, amelyet a D körül DA sugárral írt kör metsz ki belőle; még másképpen: az ABC egyenlő szárú háromszög csúcsaihoz hozzávesszük a köréje írható kör D középpontját („kör”-lehetőség, ábránk nem konvex deltoidot mutat).

c) Egy szabályos ötszög 4 csúcsa.

Az *a)* és *b)* rendszerekben általában 3-féle szakaszhosszúság fordul elő, éspedig az egyenlő szakaszok száma 4, 1, 1, ill. 3, 2, 1. Lehetséges azonban további egyenlőség, ilyenkor a rendszer háromszögei között van egyenlőoldalú. A szabályos háromszög 3-féleképpen tekinthető egyenlő szárúnak, így minden szabályos háromszög révén a rendszer főcsúcsainak száma 2-vel emelkedik. Az *a)*-ban $CD = AC$ esetén ACD és BCD szabályosak, így $ACB\sphericalangle = 120°$, tehát $AB > AC$, a hatodik szakasz hosszabb, a főcsúcsok száma ilyenkor 8 (I. 3. a'); ugyanerre jutunk *b)*-ből $AC = AD$-vel. *b)*-ből $AB = AD$-vel, valamint $AB = AC$-vel $1-1$ szabályos háromszöge lesz a rendszernek: ABD, ill. ABC, így a főcsúcsok száma 6 (I. $3b'$ és b'').

II. A feladat térben való megoldásán azt értjük, hogy a kijelölt pontok nem lehetnek egy síkban. Előző észrevételünk alapján itt előbb 7 pontból álló rendszereket sorolunk fel, az ezekből 1, ill. 2 pont elhagyásával visszamaradó rendszerek 6, ill. 5 pontra térbeli megoldások, hacsaknem egy síkban vannak. Néhány 7 pontból álló rendszer (3. ábra):



II. 1. a. II.1.b. II.1.c.

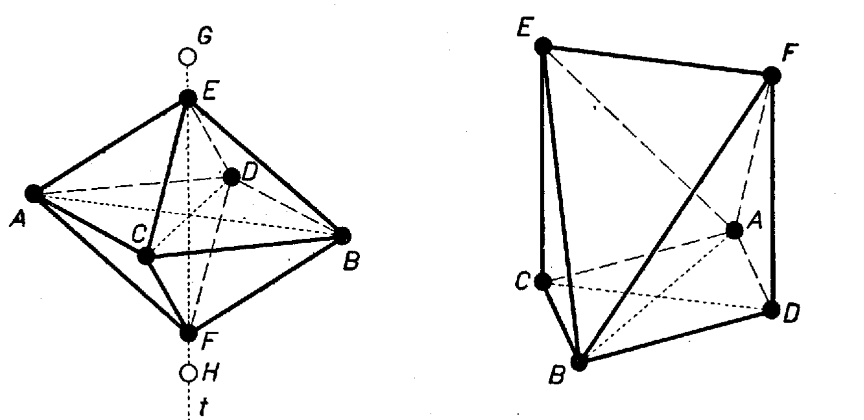
3. ábra

1. *a)* A fenti I. 1.*a)* rendszer, kiegészítve a középpontban az ötszög S síkjára merőlegesen álló t egyenesnek – az ötszög *térbeli tengelyének* – két az S-re tükrös F, G pontjával.

b) Az I. 1. *a)*-hoz 6-iknak t tetszés szerinti G pontját vesszük, 7-iknek pedig t-ből az egyik olyan H-t, amelyet a G körül GA sugárral írt gömb metsz ki. Más szóval: a t-n választott H-val kiegészített I. 1. *a)* rendszerhez hozzávesszük körülírt gömbjének G középpontját („gömb"-lehetőség, megfelel a fenti kör-lehetőségnek). G gyanánt az ötszög F középpontját is vehetjük, így az előálló „gúla" *magassága* egyenlő az alap köré írt kör *sugarával.*

c) Egy 3 oldalú, egyenlő élű egyenes hasáb 6 csúcsa és a köréje írható gömb középpontja.

2. Két az előzőkből elhagyással ki nem adódó, 6 pontból álló rendszer (4. ábra):



II. 2. a. II.2.b.

4. ábra

a) Az I. 3. *a)* rendszert (a fenti mintára vett) térbeli tengelyének azokkal az E, F pontjaival egészítjük ki, amelyekre $EA = FA = AC$ („alapél-oldalél"-lehetőség). Így C, E, D, F egy négyzet csúcsai. (Ugyanilyet ad t-nek az a G, H pontpárja, amelyre $GC = HC = AC$, vagy ha egy négyzet csúcsaihoz hozzácsatoljuk tengelyének egy tükrös pontpárját.) Ha $ACBD$ egyenlő átlójú rombusz (vagyis négyzet), akkor mindkét módon a szabályos oktaéder csúcsainak rendszerét kapjuk.

b) Egy 60°-os hegyesszögű $ACBD = R$ rombusz rövidebb CD átlójának végpontjaiban R síkjára állított merőlegeseken, e sík ugyanazon oldalán úgy vesszük fel E, F-et, hogy $EC = FD = CD$ (vagyis $CDFE$ négyzet).

3. Két az előzőkből általában ki nem adódó 5 pontból álló rendszer: *a)*, *b)*. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsait kiegészítjük a tükrös pontpár, ill. a gömb-(speciálisan a sugár-magasság) lehetőséggel. (Ilyen rendszer marad vissza a II. I. *a)* és *b)*-ből – 3. ábra – pl. C és E elhagyásával és az ABD háromszöget úgy megváltoztatva, hogy ne legyen 36°-os szöge.)

A fentiekkel mindegyik kívánt pontrendszerre adtunk példát.

Könnyű bizonyítani, hogy a felsorolt pontrendszerek bármely 3 pontja egyenlő szárú háromszöget alkot. Ezt az I. 3. és a további rendszerekre itt helyszűke miatt az olvasóra bízzuk; hangsúlyozzuk azonban, hogy elvben bármely állítás csak bizonyítással együtt fogadható el. Számos dolgozat e tekintetben hiányos.

Megjegyezzük végül, hogy mivel minden esetben van megoldás csupa valóságos háromszögekkel, azért elfajult háromszögeket (egy egyenesbe eső 3 pontot) tartalmazó rendszereket nem tekintettünk megoldásnak.

Összeállítva kiegészítésekkel a következők dolgozataiból:

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos g. I. o. t.)
Góth László (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)
Kóta József (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr István g. II. o. t.)
Molnár Mária (Sztálinváros, Kerpely A. kohóip. t. II. o. t.)
Nováky Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzés: Néhányan – elsősorban a fentiek – igyekeztek azt megmutatni, hogy 5 pont *síkban* való megfelelő elhelyezésére nincs más lehetőség, mint az I. 1. *a)* és *b)* rendszer, 6 pontra pedig csak az I. 2. rendszer. Az állítás igaz, de a bizonyítás senkinél sem teljes. Egyébként a feladat nem kívánta ezt a vizsgálatot.

Alább a fenti dolgozatokból vett gondolatokkal és kiegészítésekkel megmutatjuk, hogy 4 pont megfelelő síkbeli elhelyezésére az I. 3. *a)–c)* rendszerek az összes megoldást adják (az egyenlő oldalú háromszögeket tartalmazó I. 3. *a′)* és *b′)*, *b″)*-vel együtt), majd vázoljuk a továbbhaladást 5 pont esetében. A főcsúcsot a betűjele fölé tett vonallal jelöljük, pl. $\overline{A}BC$ jelentése: $AB=AC$ (de ez nem zárja ki $BC=AB$ lehetőségét).

Keressük meg először az olyan 4 tagú rendszereket, melyekben mindegyik pont csak egy háromszögnek főcsúcsa; így mind a 4 pont egyszer főcsúcs, mert a rendszernek 4 háromszöge van. Legyen az egyik háromszög $\overline{A}BC$. Ennek BC alapja a BCD háromszögben vagy alap, akkor $BC\overline{D}$, vagy szár, és pl. B a főcsúcs: $\overline{B}CD$, így két folytatás veendő figyelembe. Az első esetben ABD főcsúcsa már csak B lehet: $A\overline{B}D$, és hasonlóan $A\overline{C}D$. E háromszögekből rendre $BA=AC$, $CD=DB$, $DB=BA$, tehát a $BACD$ négyszög rombusz, és ebből következik a negyedik háromszögből adódó $AC=CD$ egyenlőség is. Vagyis ilyen rendszer egyedül az I. 3. *a)*.

A második esetben $\overline{A}BC$ és $\overline{B}CD$ egyértelmű folytatása $AB\overline{D}$ és $A\overline{C}D$ (2. ábra, I. 3. *c)*, tehát $AB=AC=CD=p$ és $BC=BD=AD=q$. Így az $\overline{A}BC$ és $\overline{C}AD$ háromszögek egybevágók, mert oldalaik hossza p, p, q, továbbá $\overline{B}CD$ és $\overline{D}BA$ egybevágók, mert oldalaik p, q, q. Az $\overline{A}BC$, $\overline{C}AD$ háromszög-pár közös AC oldalegyenese nem választhatja szét a nem közös B, D csúcsokat, mert szétválasztás esetén a BAC, ill. DCA szögek váltószögek lennének, így $AB\#CD$ állna, a 4 pont paralelogrammát alkotna AC és BD átlókkal. Ez pedig lehetetlen, mert minden paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével[1] és ez itt $p^2+q^2=2(p^2+q^2)$-re vezetne. Így B, D az AC-nek csak egy oldalán lehetnek. Könnyű belátni, hogy $BD \parallel AC$ és így pontjaink egy szimmetrikus trapéz csúcsai. Nem lehet $p=q$, mert így a 4 ponttal meghatározott 6 szakasz mindegyike egyenlő volna, holott 5 szakasz egyenlőségéből adódik, hogy a pontok egy 60°-os szögű rombusz csúcsai, így pedig a 6-ik szakasz, az egyik átló, hosszabb. Ezért feltehetjük, hogy $p<q$. Ekkor a trapéz körüljárása $ABDC$, és $BAC=\alpha$ tompaszög, továbbá a fentiekből $CAD\sphericalangle = 90^\circ-\alpha/2$, és $BAD\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 180^\circ-\alpha$. Ezekből az A-nál levő szögekre $(180^\circ-\alpha)+(90^\circ-\alpha/2)=\alpha$, tehát $\alpha=108^\circ$; megkaptuk az I. 3. *c)* rendszert.

Hátra vannak az olyan rendszerek, amelyekben van olyan pont, amely legalább két háromszögben főcsúcs. Az ilyen pont egy harmadik háromszögben is főcsúcs, mert pl. $\overline{D}AB$ és $\overline{D}AC$ azt jelenti, hogy $DA=DB=DC$, így A, B, C egy D középpontú körön vannak, fennáll tehát $\overline{D}BC$. Eszerint az I. 3. *b)* rendszerrel állunk szemben.

Hasonlóan két olyan pontot feltéve, amely több háromszögnek főcsúcsa –I. 3. *a′)*-re jutunk. Ha pedig a háromszoros főcsúcson túl egynél több egyszeres főcsúcs létezését tesszük fel, akkor I. 3. *b′)* és *b″)* adódik ki. További eset nem lehetséges, mert egy pont nem lehet mindnégy háromszög főcsúcsa, hiszen mindegyik pont 3 háromszögben szerepel; másrészt valamennyi I. 3. rendszert megkaptuk.

Most már az 5 pontból álló rendszerek kifejlesztése lehetséges a 4 pontból állókból, 1 további alkalmas pont hozzávételével. E célra összegyűjtjük annak összes lehetőségeit, ahogyan egy egyenlő szárú háromszöget 4 pontból álló rendszerré lehet kiegészíteni. Minden kapott 4-tagúból 4 ilyet olvashatunk le (rendre a négy csúcsot újnak tekintve), de több ismétlődés van. A lehetőségek a következők:

α) Az egyik alapcsúcs tükrözése a másik szár felező merőlegesén; ez azonban csak akkor használható, ha a főcsúcsnál levő szög 36°, vagy 108° I. 3. *c)*.

β) Egyik alapcsúcs tükrözése a másik száron, pl. B az $AC\overline{D}$ háromszög A csúcsából az I. 3. *b)* rendszerekben. (A tükörkép rajta van a főcsúcs körül a szárral mint sugárral írt körön. A főcsúcsnál levő φ szög nem lehet derékszög, mert így a tükörkép a tükrözött szár meghosszabbításába esnék, 3 pont egy egyenesen lenne.)

γ) A főcsúcs tükrözése az alapon, pl. az I. 3. *a)*-ban $\overline{A}CD$ és A-ból B.

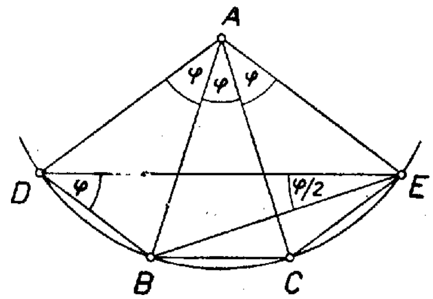
δ) A körülirt kör középpontjának hozzávétele, pl. az I. 3. *b)*-ben $AB\overline{C}$-ből D.

ε) A szimmetriatengely azon pontjának hozzávétele, amelyet a főcsúcs körül a szárral mint sugárral irt kör metsz ki, éspedig az alapnak a főcsúccsal *ε_1)* egyező, ill. *ε_2)* ellentétes partján (I. 3. *b*-ben C, az ábrán ε_1).

Ezek alapján 5-tagú rendszert 3 tagúból egy csapásra is képezhetünk: fenti lehetőségeink közül kettőt választva egyszerre két, D és E pontot kapcsolunk $\overline{A}BC$-hez, – ezáltal DAB, DAC, DBC és EAB, EAC, EBC máris egyenlő szárúak –, majd megvizsgáljuk, hogy D és E együtt bármelyik eredeti csúccsal egyenlő szárú háromszöget adnak-e. Pl. α és α-val a főcsúcsnál 36° vagy 108° szögű háromszöget mindkét szár felező merőlegesén tükrözve I. 1. *a)*-t kapjuk; ugyanebből α és δ-val I. 1. *b)*-t. Mivel azonban a *γ) – ε)* lehetőségek egy a t tengelyből való pontot csatolnak a meglevőkhöz, és t-ben az eredeti főcsúcs is benne van, azért az új 2 pont közül csak egyik képezhető a *γ) – ε)* lehetőségek szerint. Más szóval általában legalább egyik új pont *β)* szerint képezendő. β-ban viszont a tükrözési szár kétféleképpen választható.

Példaképpen keressünk olyan rendszert, amely $\overline{A}BC$-hez D-t is, E-t is a β lehetőséggel képezi. Így B, C, D, E az A körüli AB sugarú körön vannak, ezért fennáll $\overline{A}DE$, másrészt D és E az $\overline{A}BC$ tengelyére tükrösek, ezért áll $BDE_\Delta \simeq CDE_\Delta$, tehát elég pl. BDE egyenlő szárú voltát biztosítani a $BAC=\varphi$ szög alkalmas megválasztásával. Ezt φ nagysága szerint 4 esetben vizsgáljuk.

[1]Lásd pl. az 1006. feladat megoldását a XXI. kötet 1. számban, 20. o.

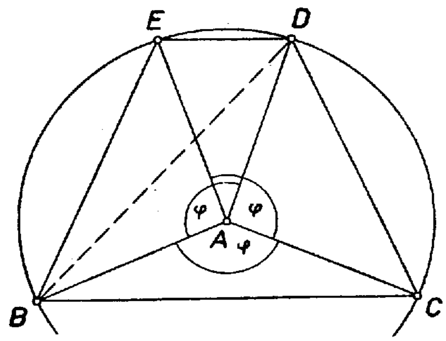


5. ábra

1. AD-t AB-n át AE-be 3φ nagyságú forgás viszi. Ha ez kisebb $180°$-nál (5. ábra), vagyis DE elválasztja A-t B-től, akkor BDE nem lehet egyenlő szárú, mert B-nél levő szöge $(360° - 3\varphi)/2$, ami tompaszög, a D és E-nél levő szögek pedig különbözők: $\varphi \neq \varphi/2$.

2. Ha $2\varphi < 180° < 3\varphi$, vagyis $90° > \varphi > 60°$, akkor A és B a DE-nek egy oldalán vannak. A szögek előbbi kifejezéseivel az egyenlő szárúság beáll, ha $B\sphericalangle = D\sphericalangle$, amiből $\varphi = 72°$ és megkapjuk I. 1. *b)*-t, vagy ha $B\sphericalangle = E\sphericalangle$, ebből azonban a *β)* lehetőségben kizárt $\varphi = 90°$ adódik.

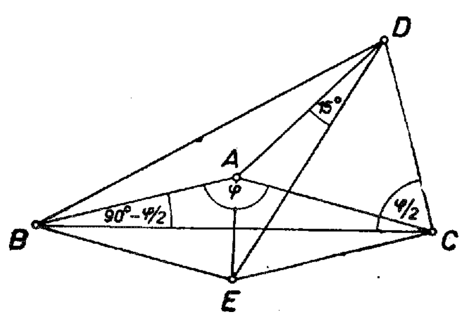
3. A $2\varphi > 180°$ és $3\varphi \leq 360°$, vagyis $90° < \varphi \leq 120°$ esetben $D\sphericalangle > 90°$, $E\sphericalangle > 45°$ és $B\sphericalangle < 45°$, nincs megoldás.



6. ábra

4. Ha $3\varphi > 360°$, akkor az AD-t AE-be átvivő kisebb forgás $3\varphi - 360°$ (6. ábra), a B szög ennek fele, $BDE\sphericalangle = BAE\sphericalangle/2 = 180° - \varphi$ és a BED szög fele a nagyobb BAD szögnek, vagyis $180° - \varphi/2$. Itt $B\sphericalangle = D\sphericalangle$-ből $\varphi = 144°$, ami ismét I. 1. *b)*-re vezet, más megoldás nincs. Ezzel a példát befejeztük.

Olyan rendszer sincs, amelyben D-t a β, E-t a γ lehetőséggel képeznők. Így ugyanis D és E a BC-nek ellentett oldalán vannak (7. ábra), mert $ABC\sphericalangle < 90°$ folytán $DBC\sphericalangle < 180°$.



7. ábra

Így a DCE szög összeadással adódik DCB és BCE-ből és értéke $90°$. Ezért kell, hogy $\overline{C}DE$ álljon, így ACD egyenlő oldalú és $\varphi = 30°$, vagy $150°$. Ebből pedig a DEA háromszög szögei $105°$, $30°$, $45°$, ill. $15°$, $30°$, $135°$, tehát ez nem egyenlő szárú. – Sokban hasonlít ehhez a $\beta - \delta$ pár vizsgálata. – Ha a további lehetőségek valamely párja pontrendszert ad, az azonos I. 1. *a)* vagy I. 1. *b)*-vel, tehát nincs más 5-tagú síkbeli pontrendszer.