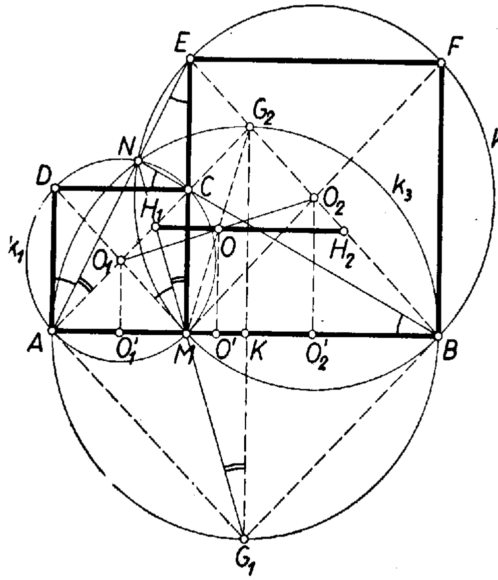
I. megoldás: *a)* Mivel A és B szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy M közelebb van A-hoz, mint B-hez. Legyen az $AMCD$ és $BMEF$ négyzet középpontja O_1, és O_2, körülírt körük k_1 és k_2. Az MBC háromszöget M körül 90°-kal elforgatva a B pont E-be, C pedig A-ba jut. Eszerint a BC és AE egyenesek merőlegesek, és így N^* metszéspontjukból (ami biztosan különbözik M-től, ha M az AB szakasz belső pontja) az AC négyzetátló is, BE is derékszögben látszik. Így N^* rajta van mindkét átló fölé rajzolt Thalész-körön, vagyis k_1-en és k_2-n, tehát azonos e körök M-től különböző N metszéspontjával.



b) N-ből a fentiek szerint AB is derékszögben látszik, tehát rajta van az AB fölötti k_3 Thalész-körön, másrészt NM felezi az ANB szöget, mert az ANM és MNB szögek a kerületi és középponti szögek tétele alapján feleakkorák, mint az AO_1M és MO_2B derékszögek. Eszerint NM a k_3-nak az ANB szög szárai között fekvő ívét, az AB egyenesnek a négyzetekkel ellentétes oldalán fekvő félkörét is felezi, és így átmegy annak G_1 felezőpontján, amely független M helyzetétől. Ezt kellett bizonyítanunk.

Ha M a K-ban van (ahol K az AB felezőpontja), akkor az első állítás semmitmondóvá válik, mert ekkor C, E és így N is a k_3 kör AB-re merőleges átmérőjének G_1-gyel szemközti G_2 végpontjába esnek. A második állítás ekkor is érvényes, mert MN azonos a KG_2-vel és ez átmegy G_1-en.

c) Az $MO_2G_2O_1$ négyszög paralelogramma, mert oldalai az $AMCD$ és $BMEF$ négyzetek átlói, és így a szemben levők párhuzamosak. Ezért O_1O_2-nek O felezőpontja a G_2M átlót is felezi, vagyis míg M befutja AB-t, addig O befutja az ABG_2 háromszögnek AB-vel párhuzamos H_1H_2 középvonalát.

Szilágyi Mária (Budapest, Veres Pálné Lg. I. o. t.)

II. megoldás: *a)* C a k_2-re nézve belső pont, mert rajta van az ME húron, ugyanis $MC = MA < MB = ME$; D viszont külső pont a k_2-re, mert belőle lehet k_2-höz DM érintőt húzni; ennélfogva N a k_1-nek (a rövidebb) CD ívén van, vagyis AB-től távolabb, mint C. Hasonlóan M a k_1-en van, E pedig a k_1-en kívül, ezért N a k_2-nek (a rövidebb) ME ívén fekszik, vagyis AB-hez közelebb, mint E. Így, ha az első állítás helyes, akkor N az AE szakaszon és BC-nek C-n túli meghosszabbításán van rajta.

Megmutatjuk, hogy az N-be befutó AN és EN egyenlő hegyes szögeket zárnak be az egymással párhuzamos és ellentétes irányú AD, ill. EM félegyenessel; ebből már következik, hogy AE átmegy N-en. A kerületi szögek tétele szerint a k_1-nek DN ívén nyugvó DAN és DMN szögek egyenlők. Másrészt DMN a k_2-ben is kerületi (érintő és húr közti) szög az MN íven, ezért egyenlő az MEN szöggel, tehát valóban $DAN\sphericalangle = MEN\sphericalangle$. Ezzel az állítást AE-re igazoltuk.

Hasonlóan $NCD\sphericalangle = NMD\sphericalangle = NBM\sphericalangle$, és mivel $CD \parallel AB$, azért N a BC meghosszabbításán van. – Ebből következik, hogy BN merőleges AN-re, mert $BNA\sphericalangle = CNA\sphericalangle$ és Thalész tétele folytán az utóbbi szög derékszög.

b) AC és BE egymást M helyzetétől függetlenül az AB mint átló fölötti AG_1BG_2 négyzet G_2 csúcsában metszik. A négyzet köré írt k_3 kör $BNA\sphericalangle = 90^\circ$ folytán átmegy N-en. Így a G_2G_1N szög egyenlő és ugyanolyan forgási irányú, mint az ugyancsak a G_2N íven nyugvó G_2AN, ez azonos a CAN szöggel, ez pedig egyenlő és ugyanolyan forgási irányú, mint a CMN szög, mert k_1-nek ugyanazon CN ívén nyugszanak. Eszerint NG_1 és NM ugyanazon irányban, ugyanakkora szöggel vannak elfordulva az egymással párhuzamos G_1G_2, ill. MC-hez képest, tehát N, G_1, M egy egyenes pontjai, és így a változó NM egyenes átmegy az állandó G_1 ponton, az állításnak megfelelően.

c) Az O_1, O_2 pontok és AB-n fekvő O_1', O_2' vetületeik derékszögű trapézt határoznak meg, ennek az O_1O_2 szakasz szára, és így a kérdéses O felezőpont az OO' középvonal egyik végpontja. Ennélfogva O-nak AB-től való távolsága egyenlő O_1O_1' és O_2O_2'-nek, az $AMCD$ és $BMEF$ négyzetek fele oldalhosszainak számtani közepével, vagyis az oldalak összegének, AB-nek negyedével, tehát állandó. Így O az M-nek bármely helyzetében az AB-től $AB/4 = G_1G_2/4 = KG_2/2$ távolságban húzott párhuzamoson, KG_2 felező merőlegesén adódik. Már most O' az A-tól K felé $AO_1' + O_1'O_2'/2 = (3AM+BM)/4$ távolságban, vagyis K-tól A felé $KO' = (BM-AM)/4$ távolságban van. Ennek legnagyobb értéke $AB/4$, – ha ti. M az A-ban van, tehát az $AMCD$ négyzet ponttá fajul, $O_1 \equiv A$ és $O_2 \equiv G$ – és ekkor O azonos AG_2-nek H_1 felezőpontjával. Másrészt KO' legkisebb értéke 0, ha ti. $M \equiv K$. Ha pedig M a KB szakaszt leírva B-be ér, akkor O a G_2B-nek H_2 felezőpontjába jut. Eszerint O mértani helyéül csak a H_1H_2 szakasz jöhet szóba.

Fordítva: a H_1H_2 szakasz minden O pontja beletartozik a mértani helybe, mert M távolsága K-tól A felé $KM = KA - AM = (BM - AM)/2 = 2KO'$, eszerint O rajta van KM felező merőlegesén, vagyis M a K pont tükörképe az O pont O' vetületére nézve. Eszerint a keresett mértani hely valóban a H_1H_2 szakasz.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. II. o. t.)

III. megoldás: (a feladat *a*) és *b*) részére). *a*) Az EAB háromszögben EM és AG_2 magasságvonalak, ezért C metszéspontjuk a magasságpont. Így a harmadik magasságvonal BC, és ez merőleges AE-re, legyen a talppontja N'. Ekkor N' rajta van a BE és a CA átmérő fölötti Thalész-körön, amely azonos k_2-vel, ill. k_1-gyel, így N' azonos N-nel, tehát BC és AE metszéspontja N.

b) Azt mutatjuk meg, hogy a G_1M egyenes az M-nek minden előírt helyzetében k_1-et és k_2-t ugyanazon pontban metszi másodszor; így ez csak N lehet. Legyen G_1M-nek k_1, ill. k_2-vel való második közös pontja N_1, ill. N_2. G_1-ből mindkét körhöz lehet érintőt húzni: G_1A-t, ill. G_2B-t és $G_1A = G_2B$. A körhöz külső pontból húzott szelő és érintő szakaszaira ismert tétel szerint
$$G_1M \cdot G_1N_2 = G_1B^2 = G_1A^2 = G_1M \cdot G_1N_1,$$
ebből $G_1N_2 = G_1N_1$, vagyis N_1 és N_2 a G_1M félegyenesen G_1-től egyenlő távolságban vannak, tehát azonosak, és ezt akartuk bizonyítani.

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Hasonlóan mutatható meg, hogy ha az adott betűzési sorrendet úgy értelmezzük, hogy az $AMCD$ és $BMEF$ négyzetek körüljárási irányának ellentétesnek kell lennie, akkor ennek fenntartásával a feladat állításai akkor is érvényesek, ha M az AB szakasz meghosszabbításain mozog. Így a két négyzet AB-nek ellentétes oldalain fekszik. A kérdéses mértani hely pedig KG_2 felező merőlegese, a H_1H_2 szakaszra vonatkozó korlátozás nélkül.