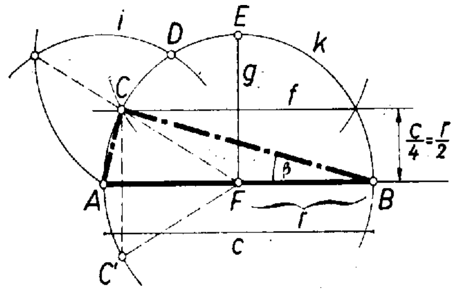
Előzetes megjegyzés. A mértani középre vonatkozó adat kézenfekvővé teszi a szerkesztésnek számítással való előkészítését. Igyekszünk azonban geometriai meggondolások révén minél kevesebb számolással célhoz érni.

I. megoldás: Az $AB=c$ átfogó ismeretében csak a derékszög C csúcsát kell megkapnunk. Erre egy mértani hely az AB átmérő fölötti Thalész-kör, a háromszög k körülírt köre. Az átfogó F felezőpontja egyben k középpontja, ezért a CF súlyvonal egyenlő k-nak r sugarával, az átfogó $c/2$ felével. Így a feltétel szerint

$$ab=(c/2)^2=c^2/4.$$

A bal oldal a háromszög kétszeres területét jelenti, az pedig másképpen cm_c-vel egyenlő. Így $cm_c=c^2/4$-ből $m_c=c/4=r/2$.

Ennek alapján a háromszöget a következőképpen szerkeszthetjük meg: az $AB=2r$ átfogó felett megrajzoljuk a k Thalész-kört (elég az AB egyik oldalán levő felét, így megválasztva, hogy C-t melyik oldalon kívánjuk), ebből az AB-re merőleges FE sugárral kimetsszük az AB fölött r magasságban fekvő E pontot; végül FE-nek f felező merőlegesével k-ból kimetsszük C-t. A két metszéspont AB-nek $FE=g$ felező merőlegesére tükrös, ezért az adódó két háromszög egybevágó.



1. ábra

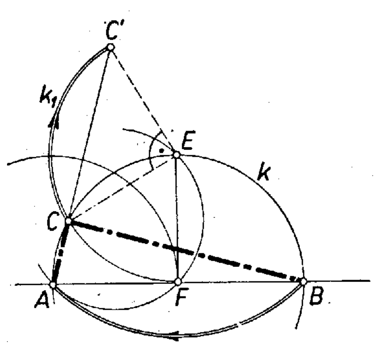
A nyert ABC háromszög megfelelő, mert derékszögű, továbbá c-re merőleges magassága $r/2=c/4$, így kétszeres területe $c\cdot c/4=c^2/4$, és ez egyenlő ab-vel. Innen a befogók mértani középarányosa: $\sqrt{ab}=c/2$, és ezzel teljesül a követelmény, mert a kérdéses súlyvonal hossza ugyancsak $c/2$.

A C csúcsot mint k és f metszéspontját E birtokában f megrajzolása nélkül is megszerkeszthetjük. Mivel ugyanis k egy F körüli körív, így az E körül r sugárral rajzolt ív éppen C-t és g-re vonatkozó tükörképét metszi ki k-ból.

Szekeres Veronika (Makó, József A. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Tudva, hogy $m_c=c/4=r/2$, meghatározhatjuk és megszerkeszthetjük a háromszög β szögét is. Jelöljük C tükörképét AB-re C'-vel. Ekkor a CFC' háromszög minden oldala r hosszúságú, tehát $CFC'\sphericalangle=60°$, így $AFC\sphericalangle=30°$ és a BCF egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, amelyek egyike β, $15°$-osak. – Ennek alapján az $AB=c$ szakasz F felezőpontja körül, és A végpontja körül $r=c/2$ sugárral k, ill. i kört rajzolunk; legyen ezek egyik metszéspontja D. A D körül r sugárral rajzolt körívnek i-vel való (F-től különböző) metszéspontját F-fel összekötő egyenes metszi ki k-ból a keresett C csúcsot.

II. megoldás: Forgassuk el a feltételnek megfelelő ABC háromszög BC befogóját az AB átmérő fölötti, C-t tartalmazó k félkörív E felezőpontja körül $90°$-kal (2. ábra).



2. ábra

Ekkor BC párhuzamos helyzetbe kerül AC-vel. B az elforgatáskor A-ba kerül, ezért C az AC egyenes egy C' pontjába kerül. Mivel a feladat feltétele szerint

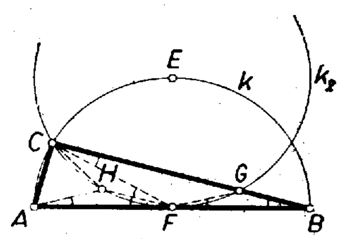
$$AC\cdot AC'=AC\cdot BC=(c/2)^2,$$

azért – annak a tételnek az alapján, hogy a körhöz egy külső pontból húzott szelőn keletkezett szakaszok mértani közepe egyenlő a pontból a körhöz húzható érintővel – az E pont körül C-n és C'-n át rajzolt k_1 körhöz A-ból húzható érintők hossza $c/2$. Tehát az érintési pontokat az A körül $c/2$ sugárral rajzolt kör és az AE mint átmérő fölé rajzolt kör metszéspontjai adják. Ezek egyike az AB szakasz F felezőpontja, ezért k_1 érinti F-ben AB-t, és így sugara $EF = c/2$. A C pontot tehát az E körül $c/2$ sugárral rajzolt kör metszi ki k-ból.

Az így szerkesztett C pont megfelel a feltételnek, mert a k_1 kör AC-vel való másik metszéspontját C'-vel jelölve $AC \cdot AC' = (c/2)^2$. Másrészt AC' az E körüli $90°$-os elforgatással átvihető BC-be és így $AC \cdot BC = AC \cdot AC' = (c/2)^2$.

Lakner József (Székesfehérvár, József A. g. II. o. t.)

III. megoldás: A szakaszok mértani közepére előbb idézett tétel szerint az AB-t F-ben érintő és C-n átmenő k_2 kör BC-t (mint szelőt) másodszor abban a (B és C közti) G pontjában metszi, amelyre $BG = BF^2/BC = c^2/4a = b = AC$ (3. ábra).



3. ábra

A BFG szög k_2-nek FG ívén fekszik, ezért egyenlő az FCB szöggel, és mivel a BFC háromszög egyenlő szárú (a BF és FC oldalak k sugarai), azért egyszersmind $FBC\sphericalangle = \beta$-val, tehát BFG egyenlő szárú háromszög, $GF = GB = b$. Legyen az F-en át BC-vel húzott párhuzamosnak k_2-vel való második metszéspontja H. Ez a párhuzamos felezi az $AFC = 2\beta$ szöget (középponti szög a k kör AC ívén), mert a HFA szög egyállású $CBA\sphericalangle = \beta$-val, ennélfogva felezi k_2-nek az AFC szög szárai közötti FC ívét is. Így a HF, HC húrok egyenlők, és mivel a $GFHC$ idom húrtrapéz, azért $HF = CH = FG = b$. Ebből következik, hogy az AFH és FBG háromszögek egybevágók, mert két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő, tehát $AH = FG = b$. Így pedig az ACH háromszög egyenlő oldalú, a HCA szög $60°$. Ebből $HCG\sphericalangle = FGC\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 30°$, eszerint k_2 középpontjából az $FC = r = c/2$ húr $60°$-os szögben látszik, így k_2 sugara egyenlő r-rel, tehát k_2 azonos az előző megoldásbeli k_1-gyel.

IV. megoldás: Kiszámíthatjuk a befogókat is. Feltehetjük, hogy $a > b$. Az $ab = c^2/4$ egyenlőséget az ismeretlen a, b-re egyenletnek tekintve és az $a^2 + b^2 = c^2$ püthagorászi egyenlőséggel összekapcsolva könnyen megoldható típusú egyenletrendszert kapunk. Az első egyenlet kétszeresét a másodikból kivonva, majd hozzáadva $a - b$-re, ill. $a + b$-re adódik egyenlet:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = c^2 - c^2/2 = c^2/2,$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = c^2 + c^2/2 = 3c^2/2,$$

és innen, minthogy szakaszok pozitív különbségéről, ill. összegéről van szó:

$$a - b = c/\sqrt{2}, \qquad a + b = c\sqrt{3}/\sqrt{2},$$

amik egyszerűen megszerkeszthető hosszúságok. Innen megkaphatjuk a-t vagy b-t; de $a - b$-ből vagy $a + b$-ből, továbbá a c oldalból és a vele szemben fekvő $\gamma = 90°$ szögből a háromszög ismert módon közvetlenül is megszerkeszthető.

Windisch Ferenc (Budapest, József A. Gimn. II. o. t.)